Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

В. В. ПОКОРНЫЙ

О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОДНОЛИСТНОСТИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 15 VI 1951)

Производная Шварца $\{w, z\} = \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$ мероморфной в области D функции $w = f(z) \not\equiv \text{const}$ определена во всей области D и обладает полюсами не выше, чем второго порядка, только в тех точках этой области, в которых производная $f'(z)$ обращается в нуль или бесконечность.

В соответствии с классической теорией дифференциальных уравнений [1], общее решение уравнения $^1/_2\,\{w, z\} = p(z)$ представимо в виде дробно-линейной функции отношения $\zeta_1(z)/\zeta_2(z)$ двух линейно независимых решений $\zeta_1(z)$ и $\zeta_2(z)$ уравнения

$$\zeta'' + p(z)\,\zeta = 0. \tag{1}$$

Известно, кроме того, что функция $f(z)$ однолистна в области G $(G \subset D)$ тогда и только тогда, когда никакое решение уравнения (1) не обращается в нуль более, чем в одной точке G. Если теперь область D содержит отрезок $[0, a]$ положительной вещественной полуоси, причем решение $\zeta(z)$ уравнения (1) обращается в нуль на концах этого отрезка и отлично от нуля внутри него, то функция $\eta = |\zeta(z)|$ совпадает на $[0, a]$ с одним из решений интегро-дифференциального уравнения

$$\eta'' + p_1(x)\,\eta - \frac{\left[\int\limits_0^x p_2(t)\,\eta^2(t)\,dt\right]^2}{\eta^3} = 0, \tag{2}$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — соответственно, вещественная и мнимая части $p(x)$.

Рассмотрение поведения решений интегро-дифференциального уравнения (2) и дифференциального уравнения

$$y'' + q(x)\,y = 0 \tag{3}$$

позволяет сформулировать некоторые достаточные условия однолистности.

В леммах 1—5 предполагается, что $p(x)$ и $q(x)$ — вещественные, непрерывные на отрезке $[0, b]$ функции x.

Лемма 1. *Если $q(x) \equiv p_1(x)$ на отрезке $[0, b]$ и точки $x = 0$, $x = x_1$ $(x_1 \leqslant b)$ являются последовательными нулями решения $y(x)$ уравнения (3), то обращающееся в нуль в точке $x = 0$ решение $\eta(x)$*

уравнения (2) *имеет по крайней мере один нуль в полуинтервале* $(0, x_1]$.

Лемма 2. *Пусть функция* $q_1(x)$ *монотонно убывает и положительна на отрезке* $[0, \alpha]$ $(\alpha \leqslant b)$ *и производная* $y_1'(x)$ *нормированного в точке* $x = 0$ $(y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 1)$ *решения уравнения*

$$y_1'' + q_1(x) y_1 = 0$$

неотрицательна на $[0, \alpha]$. *Пусть, далее,* $q_2(x) = q_1(\alpha - x)$ *и* $y_2(x)$ — *нормированное в точке* $x = 0$ *решение уравнения*

$$y_2'' + q_2(x) y_2 = 0.$$

Тогда

$$y_1(\alpha) = y_2(\alpha), \quad y_1'(\alpha) \geqslant y_2'(\alpha).$$

Лемма 3. *Если положительная функция* $q(x)$ *симметрична относительно точки* $x = \alpha$ $(q(x) = q\ (2\alpha - x))$, *являющейся ближайшим нулем производной* $y'(x)$ *нормированного в точке* $x = 0$ *решения* $y(x)$ *уравнения* (3), *то функция* $y(x)$ *также симметрична относительно точки* $x = \alpha$.

Лемма 4. *Если функция* $q(x) > 0$ *симметрична относительно точки* $x = \alpha$ *и монотонно возрастает на отрезке* $[0, \alpha]$, *концевые точки которого являются, соответственно, нулем решения* $y(x)$ *уравнения* (3) *и непосредственно следующим нулем производной* $y'(x)$ *решения, то обращающееся в нуль в точке* $x = 0$ *решение* $y_1(x)$ *уравнения*

$$y_1'' + q_1(x) y_1 = 0,$$

где функция $q_1(x)$ *определена равенством*

$$q_1(x) = \begin{cases} q(\alpha - x) & \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \\ q(x - \alpha) & \text{для} \quad \alpha \leqslant x \leqslant 2\alpha, \end{cases}$$

не имеет нулей на интервале $(0, 2\alpha)$.

Лемма 5. *Если функция* $q(x)$ *положительна и монотонно возрастает (убывает) на отрезке* $[0, 2\alpha]$ *между последовательными нулями* $x = 0$, $x = 2\alpha$ *решения* $y(x)$ *уравнения* (3), *то точка* x_0 *обращения в нуль производной* $y'(x)$ *решения является внутренней точкой интервала* $(\alpha, 2\alpha)$ (*соответственно* $(0, \alpha)$).

Пусть z_0 — точка области D и функция $p(z) = {}^1/_2\{w, z\}$ не обращается в точке z_0 в нуль или бесконечность. Рассмотрим уравнение

$$y'' + p_1(x) y = 0, \tag{3'}$$

где $p_1(x) = \operatorname{Re}[e^{2i\varphi} p(z_0 + xe^{i\varphi})]$, $\varphi = \arg(z - z_0) = \mathrm{const}$ и переменная величина x принимает вещественные положительные значения. Пусть, далее, $x = 0$ и $x = x_1(\varphi)$ — последовательные нули вещественного решения уравнения (3). В этих обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Никакое решение уравнения* (1) *не имеет более одного нуля в интервале* $(z_0, z_1(\varphi))$, *где* $z_1(\varphi) = z_0 + x_i(\varphi) e^{i\varphi}$.

Введем некоторые определения. Условимся говорить, что функция $w = f(z)$ однолистна на интервале (z_0, z_1), если она не принимает на нем дважды ни одного из своих значений. В случае, если $z_1 = \infty$, мы будем говорить о лучевой однолистности. Из теоремы 1, в частности, вытекает, что функция $w = f(z)$ однолистна на интервале $(z_0, z_1(\varphi))$.

На каждом луче $\arg(z-z_0)=\varphi=\text{const}$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, отметим точку $z_1(\varphi)$, если решение $y(x)$ уравнения (3), обращающееся в нуль в точке $x=0$, имеет нули в D, отличные от точки $x=0$, и ближайшую точку пересечения луча и границы области — в противном случае. Область, образованную интервалами $(z_0, z_1(\varphi))$, назовем звездой лучевой однолистности точки z_0. Граничными точками этой области являются граничные точки D, точка z_0 и точки выходящих из z_0 лучей, расположенные за ближайшими к z_0 нулями решений уравнения (3') („тени" ближайших нулей). Пересечение S_L звезд лучевой однолистности всех точек жордановой кривой L (если S_L не пусто) назовем областью лучевой однолистности кривой L. В этих терминах можно сформулировать следующее предложение, вытекающее из теоремы 1.

Следствие. *Для того чтобы функция $w=f(z)$ была однолистной в области G ($G\subset D$), ограниченной жордановой кривой L, достаточно, чтобы область G совпадала с областью лучевой однолистности S_L кривой L. В случае выпуклой кривой L это условие является и необходимым.*

Как показывают элементарные примеры, в некоторых случаях возможно применение этого предложения для восстановления максимальной области однолистности данной функции.

Пусть теперь $P(r)=\max\limits_{|z-z_0|=r}|p(z)|$. Рассмотрим уравнение

$$y''+P(r)\,y=0. \tag{4}$$

Исходя из того, что модуль решения уравнения (1) на интервале, ограниченном последовательными нулями решения, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению вида (2), и применяя лемму 1, можно доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Если нижняя грань расстояний между нулем и множеством остальных нулей в D решения $\zeta(z)$ уравнения* (1) *равна ρ, то ближайший нуль решения $y(r)$ уравнения* (4) *отстоит от нуля $r=0$ этого решения на расстояние $2R\leqslant\rho$.*

Применение лемм 2—4 позволяет доказать следующие теоремы.

Теорема 3. *Если $r=0$ и $r=2R$ — последовательные нули решения уравнения* (4), *то функция $w=f(z)$ однолистна в круге $|z-z_0|\leqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}R$.*

Теорема 4. *Если $r=0$ и $r=R_0$ — соответственно нуль решения $y(r)$ и ближайший нуль производной $y'(r)$ решения уравнения* (4), *то функция $w=f(z)$ однолистна в круге $|z-z_0|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}R_0$.*

Заметим, что, в силу леммы 5, в отдельных случаях оценка радиуса круга однолистности, даваемая теоремой 4, может оказаться более точной, чем оценка теоремы 3.

В некоторых случаях может оказаться полезной следующая теорема.

Теорема 5. *Если в круге $|z-z_0|\leqslant R_0$ при всех значениях параметра α, принадлежащих интервалу $(0,\pi/2)$, и при любом $t\in(0, R_0\cos\alpha)$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}P\left(\frac{t}{\cos\alpha}\right)\geqslant P\left(\sqrt{R_0^2\sin^2\alpha+t^2}\right),$$

то функция $w=f(z)$ однолистна в этом круге.

Используя мажоранты функции $P(r)$, можно получить достаточно точные частные виды оценок снизу радиуса круга однолистности. В частности, специальному виду мажоранты отвечает следующее предложение.

Теорема 6. *Функции $w=f(z)$, для которых в круге $|z|<1$*

$$|\{w, z\}| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2^{3\lambda-1}\,\pi^{2(1-\lambda)}}{(1-|z|^2)^\lambda} & \text{при } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ \dfrac{2^{3-\lambda}}{(1-|z|^2)^\lambda} & \text{при } 1 \leqslant \lambda \leqslant 2, \end{cases}$$

однолистны в единичном круге.

Случаи $\lambda=0$ и $\lambda=2$ соответствуют теоремам Z. Nehari ([2]). Оценки этой теоремы являются точными только для значений $\lambda=0, 1, 2$. В остальных случаях ($0<\lambda<2$, $\lambda \neq 1$) полученные оценки являются оценками снизу.

Поступило
6 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Reihen, Berlin, 1933.
[2] Z. Nehari, Bull. Am. Math. Soc., 55, No. 6 (1949).