Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ОДНОЗНАЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ОБЩИХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 11 VI 1951)

Выпуклой поверхностью называется любая область на границе выпуклого тела. Вся граница конечного выпуклого тела называется замкнутой выпуклой поверхностью. Две выпуклые поверхности называются изометричными, если между ними существует такое взаимно-однозначное точечное соответствие, при котором соответствующие кривые имеют одинаковые длины.

Автор доказал следующую теорему:

Замкнутые изометричные выпуклые поверхности равны *.

Ввиду краткости изложения не представляется возможным изложить полностью доказательство этой теоремы, мы укажем только основные этапы этого доказательства.

А. Пусть F_0 — замкнутая выпуклая поверхность и F_1 — выпуклая поверхность, изометричная F_0, но не равная F_0. Тогда существует сколь угодно близкая к F_0, изометричная ей, но не равная выпуклая поверхность.

Б. Пусть F_0 — замкнутая выпуклая поверхность; F_1 — выпуклая поверхность, изометрична F_0; X_0 — произвольная точка поверхности F_0; X_1 — соответствующая точка поверхности F_1; X_λ — точка, делящая отрезок X_0X_1 в отношении $\lambda:(1-\lambda)$. Тогда при достаточной близости поверхности F_1 к F_0 и λ близком к $^1/_2$:

1) геометрическое место F_λ точек X_λ есть замкнутая выпуклая поверхность;

2) отображение поверхности F_0 на поверхность F_λ, при котором произвольной точке X_0 поверхности F_0 сопоставляется точка X_λ поверхности F_λ, есть гомеоморфизм;

3) выпуклые поверхности F_λ и $F_{(1-\lambda)}$ изометричны; соответствующими по изометрии точками являются точки X_λ и $X_{(1-\lambda)}$; поверхности F_λ и $F_{(1-\lambda)}$ не равны, если не равны поверхности F_0 и F_1.

В. Пусть F_0 — замкнутая выпуклая поверхность, F_1 — выпуклая поверхность, изометричная F_0. Построим замкнутую выпуклую поверхность $F_{(^1/_2)}$ (обозначение п. Б). Опишем около этой поверхности сферу минимального радиуса. Пусть O — точка, в которой поверхность $F_{(^1/_2)}$ упирается в сферу, и σ_0 — касательная плоскость к сфере в этой точке. Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты, приняв точку O за начало координат, плоскость σ_0 — за плоскость xy, и на-

* Теорема верна и в том случае, если одна из поверхностей или обе вырождаются в дважды покрытую выпуклую область плоскости. Для простоты изложения здесь мы не рассматриваем этот случай.

правим полуось $z > 0$ в то из пространств, определяемых плоскостью σ_0, где расположена поверхность $F_{(1/2)}$. Перенесем поверхности F_0 и F_1 так, чтобы точки на них, соответствующие O, совпали с O.

Пусть $r_0(X)$ — радиус-вектор произвольной точки X поверхности F_0, $r_1(X)$ — радиус-вектор соответствующей точки поверхности F_1. Тогда, если поверхность F_0 не равна F_1, то

1) равенство $|r_0(X)| = |r_1(X)|$ не может выполняться тождественно;

2) если G — связная компонента множества точек X, где $|r_0| \neq |r_1|$ (пусть, для определенности, в G $|r_0| > |r_1|$), то поверхность Φ, заданная в области G векторным уравнением

$$r = \frac{r_0(X) + r_1(X)}{r_0^2(X) - r_1^2(X)} = r(X),$$

расположена в полупространстве $z > 0$, причем, когда точка X приближается к границе области G, соответствующая ей точка $r(X)$ поверхности Φ неограниченно удаляется от плоскости xy.

З а м е ч а н и е. Если поверхности F_0 и F_1 близки и регулярны, поверхность Φ, как можно показать, имеет неположительную гауссову кривизну и, следовательно, не может иметь расположения, указанного в 2), и, значит, поверхности F_0 и F_1 не могут быть не равны. Дл общих выпуклых поверхностей подобные заключения сделать не так просто. Это составляет наиболее трудную часть доказательства.

Г. Рассечем поверхность Φ плоскостью $z = h > 0$.

Часть $\overline{\Phi}$ поверхности Φ, расположенная ниже плоскости $z = h$, конечна. Возьмем достаточно пологий параболоид $z = k(x^2 + y^2)$ такой, чтобы поверхность $\overline{\Phi}$ была внутри параболоида, и будем его „прижимать" аффинно к плоскости $z = h$, смещая его точки пропорционально их первоначальным расстояниям от этой плоскости. В некоторый момент параболоид упрется в некоторую точку $r(X_0)$ поверхности Φ.

Пусть $\overline{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к параболоиду в точке $r(X_0)$. Положим

$$r_0(X_0) = a_0, \quad r_1(X_0) = a_1, \quad 2r(X_0) = a,$$

$$r_0(X) = a_0 + \overline{r}_0(X), \quad r_1(X) = a_1 + \overline{r}_1(X).$$

Тогда для всех X, близких к X_0,

$$-A_0\overline{r}_0(X) + A_1\overline{r}_1(X) > c\rho^2(X),$$

где $A_0 = -\overline{n} + a_0(a\overline{n})$, $A_0 = \overline{n} + a_1(a\overline{n})$, а $\rho(X)$ — расстояние между точками X и X_0 на поверхности F_0.

Если взять вместо поверхностей F_0 и F_1 изометричные выпуклые поверхности F_λ и F_μ $(\mu = 1 - \lambda)$ и построить для них аналогично поверхность Φ_λ, то нетрудно видеть, что она получается из Φ преобразованием подобия относительно центра O с коэффициентом подобия $1:(\mu - \lambda)^2$. Поэтому для X, близких к X_0,

$$-A_\lambda\overline{r}_\lambda + A_\mu\overline{r}_\mu > c_\lambda\rho_\lambda^2(X),$$

где

$$A_\lambda = -\overline{n} + (\lambda a_0 + \mu a_1)\frac{(a\overline{n})}{(\lambda - \mu)^2}, \quad A_\mu = \overline{n} + (\mu a_0 + \lambda a_1)\frac{a\overline{n}}{(\lambda - \mu)^2}.$$

Непосредственно проверяется, что $|A_\lambda| = |A_\mu|$.

При достаточной близости λ, μ к $^1/_2$ векторы $-A_\lambda$ и $-A_\mu$, будучи отложены из точек поверхностей F_λ и F_μ, соответствующих точке X_0 поверхности F_0, пройдут внутри касательных конусов поверхностей F_λ и F_μ в этих точках.

Д. Пусть $\overline{F}_\lambda$ и $\overline{F}_\mu$ — области на поверхностях F_λ и F_μ, соответствующие ε-окрестности точки X_0 на F_0. Отобразим поверхность $\overline{F}_\mu$ в плоскости σ, перпендикулярной вектору $A_\lambda + A_\mu$. Полученную поверхность обозначим $\overline{F}^*_\mu$. Пусть $r_\lambda(X)$, $r_\mu(X)$ и $r^*_\mu(X)$ — радиусы-векторы точек поверхностей $\overline{F}_\lambda$, $\overline{F}_\mu$ и $\overline{F}^*_\mu$.

Существует плоскость σ', образующая сколь угодно малый угол с плоскостью σ и пересекающая поверхность Φ', заданную векторным уравнением $r = r_\lambda(X) + r^*_\mu(X)$, так, что выполняются следующие условия:

1) граница поверхности Φ' расположена по одну сторону плоскости σ';

2) если точка P поверхности Φ' лежит в плоскости σ', то соответствующие ей точки P_λ и P^*_μ на поверхностях $\overline{F}_\lambda$ и $\overline{F}^*_\mu$ не являются коническими;

3) если обе точки P_λ и P^*_μ гладкие, то P — гладкая точка, и касательная плоскость в ней не совпадает с σ';

4) если обе точки P_λ и P^*_μ ребристые, то направления ребер соответствуют по изометрии;

5) если одна из точек P_λ и P^*_μ или обе ребристые, то направление в точке P, соответствующее направлению ребра, не лежит в плоскости σ'.

Пересечение плоскости σ' с поверхностью Φ' представляет собой замкнутую кривую или несколько таких кривых.

Е. Пусть λ и $\mu = 1 - \lambda$ близки к $^1/_2$, ε мало и угол, образуемый плоскостями σ и σ', достаточно мал.

Тогда можно сдвинуть параллельно себе поверхности F_λ и F^{**}_μ — зеркальное изображение поверхности F^*_μ в плоскости σ' — так, что для этих поверхностей и кривых γ_λ и γ^{**}_μ — соответствующих линий пересечения поверхности Φ' и плоскости σ' — будут выполняться следующие условия:

1) поверхности F_λ и F^{**}_μ расположены по одну сторону плоскости σ', однозначно проектируются на эту плоскость, обращены выпуклостью к плоскости σ, опорные плоскости поверхностей образуют с плоскостью σ' углы меньше $\vartheta' < \pi/2$;

2) соответствующие по изометрии точки кривых γ_λ и γ^{**}_μ одинаково удалены от плоскости σ'; на кривых γ_λ и γ^{**}_μ нет конических точек поверхностей; в каждой точке этих кривых есть правая и левая полукасательные; направление полукасательных не совпадает с направлением ребра, если точка ребристая; кривые γ_λ и γ^{**}_μ имеют поворот ограниченной вариации на поверхности и в пространстве;

3) если $\vartheta_\lambda(P)$ — угол между плоскостью σ' и опорной плоскостью поверхности F_λ в точке P кривой γ_λ, содержащей правую (левую) полукасательную этой кривой, а $\vartheta^{**}_\mu(P)$ — угол, образуемый соответствующей опорной плоскостью в точке P кривой γ^{**}_μ, то либо для всех P $\vartheta_\lambda(P) < \vartheta^{**}_\mu(P)$, либо для всех P $\vartheta_\lambda(P) > \vartheta^{**}_\mu(P)$. Пусть для определенности $\vartheta_\lambda(P) < \vartheta^{**}_\mu(P)$.

Ж. Обозначим $\overline{\gamma}_\lambda$ и $\overline{\gamma}^{**}_\mu$ проекции кривых γ_λ и γ^{**}_μ на плоскость σ'. Тогда поворот любого отрезка кривой $\overline{\gamma}_\lambda$ не больше поворота соответствующего участка кривой $\overline{\gamma}^{**}_\mu$, причем найдется такой отрезок кривой $\overline{\gamma}_\lambda$, поворот которого строго меньше поворота соответствующего отрезка кривой $\overline{\gamma}_\mu^{**}$. Мы пришли к противоречию, так как полные повороты кривых γ_λ и $\overline{\gamma}_\mu^{**}$ равны 2π.

В заключение укажем, что доказанные ранее автором теоремы об однозначной определенности шапочек и бесконечных выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны (1) могут быть доказаны для общих выпуклых поверхностей.

Поступило
7 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 А. В. Погорелов, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 29 (1949).