Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

О. А. ОЛЕЙНИК

О ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 VI 1951)

Будем рассматривать решение $U_\varepsilon(x, y)$ уравнения

$$L_\varepsilon(U) \equiv \varepsilon\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + A(x, y)\frac{\partial U}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial U}{\partial y} + C(x, y)\,U = f(x, y), \qquad (1)$$

удовлетворяющее на границе S области G условию:

$$\frac{\partial U}{\partial n}\ldots \qquad (2)$$

(P — произвольная точка границы S, $\partial U/\partial n$ означает производную по внутренней нормали к границе области G от функции $U(x,y)$).

Будем изучать поведение решений $U_\varepsilon(x, y)$ уравнения (1) с граничным условием (2), когда малый параметр $\varepsilon > 0$ стремится к нулю.

Известно [1], что при $\varepsilon > 0$ существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее на границе S условию (2) при ограничениях на коэффициенты и область G, автоматически выполняющихся при наших дальнейших предположениях.

Задача Дирихле для уравнения (1) с малым параметром исследована Н. Левинсоном [2].

Предположим, что функции $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $f(x,y)$ имеют непрерывные частные производные до шестого порядка включительно в некоторой области D, содержащей $\bar{G} \equiv G + S$. Будем предполагать, что граница S области G состоит из конечного числа замкнутых кривых, координаты x и y каждой из которых являются шесть раз непрерывно дифференцируемыми функциями длины дуги; $\psi(P)$, как функция длины дуги, имеет три непрерывные производные; в области $\bar{G}$ выполняются условия:

$$A^2(x,y) + B^2(x,y) \neq 0, \qquad C(x,y) < 0.$$

Установим на границе S положительное направление так, чтобы при обходе границы в положительном направлении область оставалась слева. Обозначим через s длину дуги кривой из S, и пусть s возрастает при обходе кривой в положительном направлении.

Пусть на границе S области G имеется только конечное число точек, где $B(x,y)\frac{dx}{ds} - A(x,y)\frac{dy}{ds} = 0$, и пусть при переходе через эти точки функция $B(x,y)\frac{dx}{ds}-A(x,y)\frac{dy}{ds}$ меняет знак. Обозначим через S_1 те куски границы S, где $B(x,y)\frac{dx}{ds}-A(x,y)\frac{dy}{ds}<0$, и через S_2 — те части границы S, где $B(x,y)\frac{dx}{ds}-A(x,y)\frac{dy}{ds}>0$.

Будем предполагать, что дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{A(x,y)}=\frac{dy}{B(x,y)},$$

определяющее семейство характеристик уравнения первого порядка

$$A(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}+C(x,y)U=f(x,y), \tag{3}$$

не имеет замкнутых интегральных кривых в области D. Установим вдоль характеристик направление, задаваемое в каждой точке вектором с компонентами $(A(x,y), B(x,y))$. Обозначим через $\cos(t, s)$ функцию, определенную на S и равную косинусу угла между характеристикой и касательной к границе.

При указанных предположениях имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если существует решение $U(x, y)$ уравнения* (3), *которое имеет непрерывные производные второго порядка в замкнутой области G и удовлетворяет на S_1 условию $\partial U/\partial n=\varphi(P)$, то функции $U_\varepsilon(x,y)$ при ε, стремящемся к нулю, равномерно в $\bar{G}$ сходятся к функции $U(x,y)$.*

Теорема 2. *Пусть на S_1 имеется только конечное число точек, где $\cos(t,s)=0$. Пусть в этих точках либо $\frac{d}{ds}[\cos(t,s)]$, либо $\frac{d^2}{ds^2}[\cos(t,s)]$ отлично от нуля. Предположим еще, что для области G нельзя составить замкнутую линию, состоящую из кусков границы, принадлежащей S_1, и кусков тех характеристик, которые касаются границы, и ориентировать эту замкнутую линию так, чтобы все куски характеристик приходились в установленном ранее на характеристиках направлении.*

При этих предположениях решения $U_\varepsilon(x,y)$ уравнения (1) *с граничным условием* (2) *равномерно сходятся в замкнутой области $\bar{G}$ при ε, стремящемся к нулю, к функции $U(x,y)$, которая однозначно определяется следующими условиями:* 1) *$U(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$ и удовлетворяет уравнению* (3) *всюду в G, кроме, быть может, тех точек, которые лежат на характеристиках, касающихся границы или пересекающих границу S_1 под прямым углом;* 2) *в точках границы S_1 $\partial U/\partial n=\varphi(P)$.*

При доказательстве теорем 1 и 2 мы используем следующие основные леммы.

Лемма 1. *Пусть $V(x,y)$ — решение уравнения $L_\varepsilon(V)=0$, непрерывное в замкнутой области $\bar{G}$. Пусть $V(x,y)$ достигает минимума в некоторой граничной точке P.*

Если в точке P существует $\partial V/\partial n$, то либо в этой точке $\partial V/\partial n>0$, либо $V(x,y)$ постоянна в области G.

Замечание 1. Лемма 1 справедлива для решений линейных эллиптических уравнений второго порядка с любым числом независимых переменных. От коэффициентов уравнения достаточно требовать существования производных третьего порядка, удовлетворяющих условию Гельдера, и неположительности коэффициента в уравнении при функции $V(x,y)$.

Относительно границы области G достаточно потребовать, чтобы каждой точки границы можно было коснуться некоторым шаром, принадлежащим области G.

Замечание 2. Из леммы 1 непосредственно следует для дифференциальных уравнений и областей, указанных в замечании 1, единственность следующей краевой задачи: на границе S задается:

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \sum_i b_i(P) \frac{\partial V}{\partial s_i} + a(P) V = \varphi(P),$$

P — точка границы S; $\partial V / \partial s_i$ означает производную по направлению, лежащему в касательной плоскости к границе в точке P; $a(P) \leqslant 0$. Если все $b_i(P) \equiv 0$ и $a(P) \equiv 0$, то имеем вторую краевую задачу.

Лемма 2. *Пусть $U_\varepsilon(x,y)$ удовлетворяет уравнению* (1) *и граничному условию* (2). *В области G имеет место неравенство*

$$| U_\varepsilon(x, y) | < K(m + M),$$

где m — максимум модуля $\varphi(P)$, M — максимум модуля $f(x, y)$ в области G, K — постоянная, не зависящая от ε и $f(x, y)$.

Поступило
19 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Lichtenstein, Math. Zs., 20, 194 (1924). [2] N. Levinson, Ann. of Math., 51, No. 2, 428 (1950).