Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

С. Н. МЕРГЕЛЯН

О НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком М. В. Келдышем 9 VI 1951)

1. Рассмотрим замкнутое связное множество E, расположенное в плоскости комплексного переменного z и имеющее связное дополнение*. Через $f(z)$ обозначим функцию, определенную и непрерывную на E и аналитическую в каждой внутренней точке E. Совокупность всех таких функций обозначим через $A(E)$. Нижнюю грань чисел

$$\max_{z\in E}|f(z)-P(z)|$$

по всевозможным полиномам от z степени $\leqslant n$ обозначим через $\rho_n(f, E)$.

Известно, что скорость убывания к нулю чисел ρ_n тесным образом связана с дифференциальными и иными свойствами $f(z)$, а также со свойствами множества E.

В ряде работ исследовался характер зависимости ρ_n от $f(z)$ и E, однако полученные до сего времени результаты относились лишь к некоторым специальным классам множеств и не давали сколько-нибудь полного представления о том, от каких же именно свойств E и каким образом зависят числа ρ_n.

В работе [2] установлено соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n(f, E)=0,$$

которое позволяет ставить задачу о наилучшем приближении функций класса $A(E)$ на произвольных континуумах со связным дополнением.

В настоящей заметке мы приводим ряд результатов, выявляющих количественную и качественную стороны зависимости ρ_n от множества и функции в случае произвольного континуума.

По поводу точности полученных оценок заметим, что в большинстве случаев указываются функции $\varphi(n)$, для которых выполняется соотношение

$$c_1\varphi(n)<\rho_n<c_2\varphi(n),$$

где c_1, c_2 не зависят от n.

2. Через L_h $(h>0)$ обозначим линию уровня функции Грина CE, т. е. образ окружности $|w|=1+h$ при конформном отображении

* Все встречающиеся в этой заметке множества расположены в ограниченной части плоскости.

$|w|>1$ на дополнение к E, при котором $w=\infty$ соответствует $z=\infty$; D_h — конечная область, ограниченная L_h. Пусть Γ означает границу области, дополнительной к E, $\zeta \in \Gamma$, $d(\zeta, h)$ — расстояние ζ до L_h. Через $d(h)$ обозначим $\max\limits_{\zeta \in \Gamma} d(\zeta, h)$. При $h \to 0$ $d(h) \to 0$, причем скорость убывания $d(h)$ характеризует в какой-то мере «разбросанность» множества E.

Для случая жордановых областей E в работе ([3]) установлено, что одной из характерных особенностей наилучших приближений на E является то обстоятельство, что одна и та же скорость приближения $\rho_n(f, E)$ накладывает на $f(z)$ различные ограничения в различных точках $\zeta \in \Gamma$, и притом эти ограничения тем жестче, чем медленнее убывает к нулю функция $d(\zeta, h)$ при $h \to 0$. На этой локализации свойств $f(z)$ по известной скорости приближения, справедливой для любых множеств E, в настоящей заметке мы не останавливаемся.

Через $\mu(n, h, E)$ обозначим верхнюю грань чисел $\rho_n(f, E)$ по всевозможным функциям $f(z)$, аналитическим и ограниченным единицей в D_h. Известно, что

$$\mu(n, h, E) < c_3 (1+h)^{-n},$$

где постоянная c_3 не зависит от n, но существенным образом зависит от h. Во многих вопросах теории приближений возникает необходимость знать явное выражение зависимости c_3 от h и E.

Лемма. *Существует абсолютная постоянная c_4 такая, что при $n > h^{-2}$*

$$\mu(n, h, E) < c_4 h^{-3} (1+h)^{-n}.$$

Если же о E известно, что Γ состоит из конечного числа гладких кривых, то для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти постоянную c_5, зависящую лишь от длины Γ и числа ε, такую, что при $n > h^{-1-\varepsilon}$

$$\mu(n, h, E) < c_5 h^{-3} (1+h)^{-n}.$$

Через $\omega(\delta)$ обозначим модуль непрерывности функции $f(z) \in A(E)$ на множестве E, т. е.

$$\sup |f(z') - f(z'')|$$

по всевозможным парам точек $z' \in E$, $z'' \in E$ с условием $|z' - z''| \leqslant \delta$. В терминах введенных функций d, μ и ω оказывается справедливой следующая общая теорема:

Теорема 1. *Если континуум E не разбивает плоскость, то справедливо соотношение*

$$\rho_n(f, E) < c_6 \min_{h \geqslant 0} \{\omega[d(h)] + \mu(n, h, E)\},$$

а также вытекающее из него неравенство

$$\rho_n(f, E) < c_7 \omega[d(\lambda_n)] < c_7 \omega[d(n^{-1/2})],$$

где λ_n — корень уравнения $\mu(n, h, E) = h$, а c_6 и c_7 не зависят от n.

Эта оценка существенно не может быть улучшена, так как для широкого класса функций $f(z)$ и множеств E имеет место обратное неравенство:

$$\rho_n(f, E) > c_8 \omega[d(\lambda_n)].$$

Входящие в эти неравенства числа λ_n оцениваются на основании леммы; что же касается функции $d(h)$, то скорость ее убывания в ряде конкретных случаев можно определить с помощью некоторых теорем С. Варшавского [1], в общем же случае для оценок $d(h)$ необходимо воспользоваться известными результатами М. А. Лаврентьева в метрической теории конформных отображений.

Применение этих оценок к теореме 1 позволяет извлечь из нее точные неравенства для ρ_n в явном виде для ряда конкретных и часто встречающихся классов множеств.

Теорема 2. *Если область D ограничена конечным числом гладких дуг, составляющих между собой углы, внешние растворы которых превосходят $\pi\lambda$, $f^{(k)}(z) \in A(\overline{D})$, а $\omega_k(\delta)$ — модуль непрерывности $f^{(k)}(z)$ в $\overline{D}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует не зависящая от n постоянная c_9 такая, что*

$$\rho_n(f, \overline{D}) < c_9 n^{-\lambda k+\varepsilon} \omega_k(n^{-\lambda+\varepsilon}).$$

Эта оценка в рассматриваемом классе областей не может быть улучшена, так как для любой функции $\varphi(n) > 0$, удовлетворяющей при всяком $\varepsilon > 0$ условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{\varepsilon}} = 0,$$

можно указать область D и функцию $f(z)$, для которых

$$\rho_n(f, \overline{D}) > c_{10} \varphi(n) n^{-k\lambda} \omega_k[\varphi(n) n^{-\lambda}].$$

Теорема 3. *Пусть l — простая жорданова дуга с непрерывно меняющейся касательной, а $\omega_k(\delta)$ — модуль непрерывности k-й производной некоторой определенной на l функции $f(z)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует не зависящая от n постоянная c_{11} такая, что*

$$\rho_n(f, l) < c_{11} n^{-k+\varepsilon} \omega_k(n^{-1+\varepsilon}), \quad k \geqslant 0.$$

Эта оценка также не может быть улучшена в указанном выше смысле.

3. Предполагая относительно функции $f(z) \in A(E)$, что она обладает достаточно хорошими свойствами на E, например, что $\omega(\delta) < \delta^{\lambda}$ $(0 < \lambda \leqslant 1)$, рассмотрим вопрос о том, какого рода особенности множества E могут произвольно сильно замедлять скорость убывания чисел $\rho_n(f, E)$.

Мы будем говорить, что граница некоторой области D (или, вообще, некоторый континуум E) содержит петли, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется круг K радиуса r, расположенный вне $\overline{D}$ (E) и обладающий тем свойством, что на границе D (на E) можно отметить точки z_1 и z_2 с условием $|z_1 - z_2| < \varepsilon r$ такие, что любая кривая, соединяющая центр K с бесконечно удаленной точкой, непременно пересекает или $\overline{D}$ (E) или же отрезок с концами в z_1, z_2. Оказывается, что петли и являются искомыми особенностями множества. Приводимое ниже утверждение иллюструрует влияние петель на скорость приближения.

Теорема 4. *Для любой последовательности $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \to 0$ существует область D со спрямляемой границей, имеющей в каждой точке касательную, и функция $f(z) \in A(\overline{D})$, удовлетворяющая в $\overline{D}$ условию Липшица любого порядка < 1, для которых, однако,*

$$\rho_n(f, \overline{D}) > \lambda_n, \quad n \geqslant n_0.$$

Следующее предложение дает оценку скорости приближения для произвольных областей с кусочно-гладкой границей, не содержащих петель.

Теорема 5. *Пусть область E со связным дополнением и кусочно-гладкой границей обладает тем свойством, что для некоторых постоянных C и $\varepsilon > 0$ центр любого расположенного вне E круга K с радиусом $r < \varepsilon$ можно соединить с бесконечно удаленной точкой линией, Cr-окрестность которой также расположена вне E. Если $f(z) \in A(E)$, то*

$$\rho_n(f, E) < c_{12}\omega\left[(\ln n)^{-1/2}\right],$$

где c_{12} не зависит от n. Эта оценка порядка убывания ρ_n не может быть существенно улучшена.

4. Из приведенных результатов можно сделать вывод о том, что *скорость наилучшего приближения на произвольном континууме определяется величиной $\omega[d(\lambda_n)]$; при этом влияние множества на ρ_n сосредоточено в выражении $d(\lambda_n)$*. Если рассматривать связь между ρ_n и максимумами модулей последовательных частных производных $f(z)$ (в случае ее неограниченной дифференцируемости), то для некоторых множеств она носит совершенно иной характер, чем соответствующая связь в действительной области. Так например, оказывается, что *если E содержит два пересекающихся отрезка, а в остальном произвольно, то для функции $f(z) \equiv \operatorname{Re} z$ будем иметь*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, \rho_n(\operatorname{Re} z, E)\, n^{2+\varepsilon} = \infty \qquad (*)$$

при всяком $\varepsilon > 0$.

Пусть $f(z) \in A(E)$, $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, $\operatorname{Im} f(z) = v(z)$. Мы будем говорить, что $f(z)$ удовлетворяет на множестве E условиям Коши — Римана, если у функций $u(z)$ и $v(z)$ существуют в каждой точке $z_0 \in E$ производные $u_\alpha(z_0)$, $v_\alpha(z_0)$ по любому направлению $\arg(z - z_0) = \alpha$ (по множеству E; аргументы функций рассматриваются только на E), причем для любых α и β эти производные связаны соотношениями

$$u_\alpha(z_0)\cos\alpha + v_\alpha(z_0)\sin\alpha = u_\beta(z_0)\cos\beta + v_\beta(z_0)\sin\beta,$$
$$-u_\alpha(z_0)\sin\alpha + v_\alpha(z_0)\cos\alpha = -u_\beta(z_0)\sin\beta + v_\beta(z_0)\cos\beta.$$

Теорема 6. *Если при некотором $\varepsilon > 0$*

$$\rho_n(f, E) < \frac{C}{n^{2+\varepsilon}},$$

то $f(z)$ удовлетворяет на множестве E условиям Коши — Римана.

Из этой теоремы, в частности, следует $(*)$.

Сектор математики
Академии наук Арм.ССР и
Ереванский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило
9 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Варшавский, Trans. Am. Math. Soc., 51, No 1, January (1942). [2] С. Н. Мергелян, ДАН, 78, № 3 (1951). [3] С. Н. Мергелян, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, № 37 (1951).