Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 VI 1951)

Пусть $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)_{k,\,l=1}^{p}$; $A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum\limits_{0 \leqslant j_1+\ldots+j_n \leqslant s} f_{kl}^{j_1 \ldots j_n} \times$ $\times \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}$ суть линейные дифференциальные операторы, коэффициенты которых являются комплексными функциями действительных аргументов $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$, определенными в некоторой области D. Пусть каждый коэффициент при производной порядка j непрерывно дифференцируем в этой области $j + t$ раз $(t \geqslant 0)$ (кроме того, если $s = 1$, коэффициенты при производных первого порядка предполагаются непрерывно дифференцируемыми $2 + t$ раз). Пусть, наконец, $\det\left(\sum\limits_{j_1+\ldots+j_n=s} f_{kl}^{j_1 \ldots j_n}(x)\, \alpha_1^{j_1} \ldots \alpha_n^{j_n}\right)$ отличен от нуля для всякой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ и произвольной ненулевой действительной точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (матрица $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — эллиптического типа).

Как указывалось в сообщении [1], при сделанных предположениях во всякой конечной области V, лежащей в D вместе со своей границей, существует нормальная фундаментальная матрица $\omega(x, y)$, соответствующая матрице $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, имеющая при $x, y \in V$, $x \neq y$, производные вида:

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n+l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial y_1^{l_1} \ldots \partial y_n^{l_n}}\, \omega(x, y) \quad (k_1 + \ldots + k_n \leqslant t,\ l_1 + \ldots + l_n \leqslant t),$$

принадлежащие, соответственно, классам $K_{n-s+k_1+\ldots+k_n+l_1+\ldots+l_n}$ *. Этот результат характеризует особенность фундаментальной матрицы $\omega(x, y)$. Фредгольм [2] исследовал характер возможных изолированных особенностей решений уравнений теории упругости, выражая их главную часть через фундаментальную матрицу и ее производные; сходным методом здесь будет рассмотрен этот вопрос в более общих предположениях, указанных ранее.

Это исследование основано на следующей лемме.

---

* Функция $\varphi(x, y)$ принадлежит классу K_m, если при $x, y \in V$, $x \neq y$, $\varphi(x, y)$ непрерывна и $|x - y|^m \varphi(x, y)$ (при $m > 0$), или $\varphi(x, y)/\lg|x - y|$ (при $m = 0$), или $\varphi(x, y)$ (при $m < 0$) ограничена.

Лемма. *Пусть число* t $\left(\text{введенное при описании свойств } A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ *не меньше* s.

Тогда для каждой точки $y \in V$ *можно указать такие матрицы — решения уравнения* $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ * $\theta_{k_1 \ldots k_n}(x, y)$ $(0 \leqslant k_1 + \ldots + k_n < t)$, *непрерывно дифференцируемые* t *раз по* x *в некоторой окрестности* D_y *точки* y, *что для всякого столбца — решения* $u(x)$ *этого уравнения, непрерывно дифференцируемого* s *раз (и, следовательно,* t *раз, см.* [1]) *в некоторой окрестности точки* y *имеет место представление*

$$u(x) = \sum_{\substack{0 \leqslant k_1 + \ldots + k_n < t \\ 0 \leqslant k_n \leqslant s}} \theta_{k_1 \ldots k_n}(x, y) \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}} u(y) + R^{(u)}(x, y); \tag{1}$$

$$|x - y|^{l_1 + \ldots + l_n - t} \frac{\partial^{l_1 + \ldots + l_n}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} R^{(u)}(x, y) \text{ ограничено при } l_1 + \ldots + l_n < t.$$

Наконец, в случае аналитических коэффициентов операторов матрицы $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *в разложении (1) можно полагать* t *бесконечным и получающийся ряд и ряды, полученные почленными дифференцированиями, равномерно сходящимися.*

Справедливость утверждений леммы для аналитического случая следует из известных результатов теории аналитических дифференциальных уравнений. Доказательство леммы для неаналитического случая следует из представления решений через фундаментальную матрицу [1] и справедливости леммы для аналитического случая.

Как указывалось в [1], можно определить такие билинейные матричные дифференциальные $B_x^j(u, v)$ (значок x указывает аргумент дифференцирования в этих формах), что для любых достаточно гладких функциональных матриц подходящих размеров

$$u(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) - \left(A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u'(x)\right)' v(x) = \sum_{j=1}^{n} B_x^j(u(x), v(x)). \tag{2}$$

Пусть теперь $\psi(x, z)$ есть функциональная матрица, определенная и непрерывно дифференцируемая s раз по x при $x, z \in V$, $x \neq z$, удовлетворяющая условию $A\left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, z) = 0$. По определению нормальной фундаментальной матрицы $\omega(x, y)$ $\omega'(y, x)$ есть фундаментальная матрица, соответствующая $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Пусть S есть поверхность, ограничивающая достаточно малую допустимую область **, содержащуюся в D вместе с границей; $y, z \in V$, $y \neq z$; S_y, S_z суть достаточно малые сферы радиуса ρ с центрами y, z, соответственно. Тогда из (2)

$$\overbrace{\int \cdots \int_{S_y}}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - y_j}{\rho} B_x^j(\omega(y, x), \psi(x, z))\, d_x S +$$

---

* Для функциональной матрицы T T' обозначает транспонированную матрицу, для операторной — сопряженную.

** См. [3], стр. 57.

$$+\overbrace{\int_{S_z}\cdots\int}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-z_j}{\rho}B_x^j(\omega(y,\ x),\ \psi(x,\ y))\,d_xS+$$

$$+\overbrace{\int_{S}\cdots\int}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\cos\nu_j(x)\,B_x^j(\omega(y,\ x),\ \psi(x,\ z))\,d_xS=0. \qquad (3)$$

Здесь $\nu_j(x)$ $(j=1,\ldots,n)$ суть направляющие углы внутренней нормали к S в x.

По определению фундаментальной матрицы,

$$\lim_{\rho\to 0}\overbrace{\int_{S_y}\cdots\int}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-y_j}{\rho}B_x^j(\omega(y,\ x)\,\psi(x,\ z))\,d_xS=-\psi(y,\ z).$$

Таким образом, используя (1),

$$\psi(y,\ z)=-\sum_{\substack{0\leqslant k_1+\ldots+k_n<t\\ 0\leqslant k_n<s}}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}\omega(y,\ z)\times$$

$$\times\overbrace{\int_{S_z}\cdots\int}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-z_j}{\rho}B_x^j(\theta'_{k_1\ldots k_n}(x,\ z),\psi(x,\ z))\,d_xS-$$

$$-\overbrace{\int_{S_z}\cdots\int}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-z_j}{\rho}B_x^j(R^{(\omega)'}(x,\ y,z),\psi(x,\ z))\,d_xS+$$

$$+\overbrace{\int_{S}\cdots\int}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\cos\nu_j(x)\,B_x^j(\omega(y,\ x),\ \psi(x,\ z))\,d_xS. \qquad (4)$$

Так как $\theta_{k_1\ldots k_n}(x,\ z)$ $(k_1+\ldots+k_n<t)$ суть решения уравнения $A'\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$, то из (2) далее следует, что

$$\overbrace{\int_{S_z}\cdots\int}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-z_j}{\rho}B_x^j(\theta'_{k_1\ldots k_n}(x,\ z),\psi(x,\ z))\,d_xS=-\tau^{(\psi)}_{k_1\ldots k_n}(z)$$

не зависит от ρ.

Матрица

$$\overbrace{\int_{S}\cdots\int}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\cos\nu_j B_x^j(\omega(y,\ x),\ \psi(x,\ z))\,d_xS=\psi_0(x,\ z)$$

представляет собою непрерывно дифференцируемое t раз по y в V решение уравнения $A\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0$ (без особенности в точке z).

После сделанных замечаний из формулы (4) непосредственно следует теорема.

Теорема. *Пусть при* $x \neq y$ $\psi(x, y)$ *непрерывно дифференцируема* s *раз по* x,

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\psi(x, y) \in K_{t-s+k_1+\dots+k_n+n-0} \quad (k_1+\dots+k_n < s),$$

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, y) = 0.$$

Тогда

$$\psi(x, y) = \sum_{\substack{0\leqslant k_1+\dots+k_n<t \\ 0\leqslant k_n < s}} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}}\omega(x, y)\,\tau^{(\psi)}_{k_1\dots k_n}(y) + \psi_0(x, y).$$

В случае, если коэффициенты операторов, составляющие матрицу $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, *аналитические функции, в предположении, что* $\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\psi(x, y)$ $(k_1+\dots+k_n \leqslant s)$ *непрерывны при* $x \neq y$ *и* $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, y) = 0$, *получаем*

$$\psi(x, y) = \sum_{k_1,\dots,k_{n-1}=0}^{\infty}\sum_{k_n=0}^{s-1} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_n^{k_n}}\omega(x, y)\,\tau^{(\psi)}_{k_1\dots k_n}(y) + \psi_0(x, y).$$

Из этой теоремы или непосредственно из (8) следуют также следующие предложения.

1. *Если* $|x-y|^{n-1}\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\psi(x, y)\underset{x\to y}{\longrightarrow} 0$ *при* $0 \leqslant k_1+\dots+k_n < s$, *то* $\psi(x, y)$ *непрерывно дифференцируема* t *раз по* x *в* V *(особенность устраняется).*

2. *Если (при* $t \geqslant s-1$ *функциональная квадратная матрица* $\varphi(x, y)$ *обладает свойствами: при* $x \neq y$ $\varphi(x, y)$ *непрерывно дифференцируема* s *раз по* x *в окрестности* y *и* $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x, y) = 0$, *для всякой* s *раз непрерывно дифференцируемой в окрестности* y *функциональной строки* $u(x)$ *имеет место соотношение*

$$\lim_{\rho\to 0}\overbrace{\int\cdots\int_{S_y}}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-y_j}{\rho}B_x^j(u(x), \varphi(x, y))\,d_xS = u(y)$$

($\varphi(x, y)$ *есть фундаментальная матрица матрицы* $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$*), то* $\varphi(x, y) - \omega(x, y)$ *есть функция,* s *раз непрерывно дифференцируемая по* x *в окрестности* y *(и в точке* y*), удовлетворяющая уравнению* $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
8 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Б. Лопатинский, ДАН, 77, № 3 (1950). [2] J. Fredholm, Acta Math., 23 (1900). [3] П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М., 1947.