Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

О. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О ЗАМЫКАНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 VI 1951)

Рассмотрим в конечной области Ω n-мерного пространства $(x_1, \ldots, x_n)$ уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u = f(x) \tag{1}$$

эллиптического типа, т. е. такое, что для любых вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеет место неравенство:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \alpha_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Сделаем следующие допущения: 1) коэффициенты $a_{ij}(x)$ суть функции, непрерывно дифференцируемые в замкнутой области $\overline{\Omega}$, а $a_i(x)$ и $a(x)$ ограничены и измеримы в $\overline{\Omega}$; 2) контурная функция $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$, дающая уравнение границы S области Ω в местных координатах, дважды непрерывно дифференцируема по $y_1, \ldots, y_{n-1}$; 3) уравнению $Lu = 0$ при граничном условии $u|_S = 0$ удовлетворяет лишь $u(x) \equiv 0$.

Обозначим через $\overset{0}{\mathscr{L}}$ множество функций, дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и равных нулю на S.

На линеале $\overset{0}{\mathscr{L}}$ оператор L имеет ограниченный оператор в норме гильбертова пространства H обратный оператор [1], т. е.

$$\| u \| = \left(\int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2} \leqslant C \| Lu \|. \tag{2}$$

Замыкание линеала $\overset{0}{\mathscr{L}}$ в норме

$$|u|_W = \left\{ \int_{\Omega} \left[u^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right] d\Omega \right\}^{1/2}$$

обозначим через W. Функции из W имеют обобщенные производные до второго порядка включительно, принадлежащие H.

Кроме того, благодаря теоремам вложения С. Л. Соболева, имеет смысл говорить о предельных значениях на S как самих функций

$u(x)$ из W, так и их первых производных [2]. Именно, предельные значения самих функций будут почти всюду на S равны нулю, а предельные значения их первых производных суть функции, суммируемые на S по крайней мере со второй степенью.

Рассмотрим оператор L на функциях из W. Ясно, что $Lu \in H$, если $u \in W$.

Возьмем последовательность функций $u_n(x)$ из W такую, что $f_n = Lu_n$ сходятся в норме H к какой-нибудь функции $f \in H$. Тогда, оказывается, предельная для $u_n(x)$ функция будет также принадлежать W. Иными словами, имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Оператор Lu замкнут на W.*

Если множество значений Lu для $u \in \overset{0}{\mathscr{L}}$ плотно в H^*, то из теоремы 1 следует, что первая однородная краевая задача для уравнения (1) разрешима для любой $f(x)$ из H и ее решение принадлежит W, иначе:

Теорема 2. *Оператор L устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функциями из W и H.*

Теорема 1 есть непосредственное следствие следующей теоремы, доказанной автором настоящей заметки:

Теорема 3**. *Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$ и $a(x)$ имеют непрерывные в $\overline{\Omega}$ производные до k—2-го порядка, если $k \geqslant 3$; если же $k = 2$, то коэффициенты a_{ij} должны быть непрерывно дифференцируемыми, a_i и a — ограниченными и измеримыми в $\overline{\Omega}$. Контурная функция $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$ k раз непрерывно дифференцируема.*

Тогда для функции $u(x)$, имеющей в замкнутой области непрерывные производные до k-го порядка и удовлетворяющей на S условиям

$$u\,|_S = Lu\,|_S = L(Lu)\,|_S = \ldots = L^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} u\,|_S = 0 \quad ***$$

$$\left(\text{или} \left[\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial L^l u}{\partial x_i} \cos(\overline{n}, x_j) + h L^l u \right]_S = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, \left[\frac{k-1}{2}\right] \right)$$
справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} I_{2r+1}(u) &= I_1(L^r u) + R_{2r}(u) \qquad \text{для } k = 2r+1; \\ I_{2r}(u) &= I_0(L^r u) + R_{2r-1}(u) \qquad \text{для } k = 2r, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$I_l(u) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i_1, \ldots, i_l,\ j_1, \ldots, j_l = 1}^{n} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_l j_l} \frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}} \frac{\partial^l u}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_l}}\, d\Omega,$$

---

* Достаточные для этого условия даны в работе Жиро [3], а именно: производные третьего порядка от a_{ij} и производные второго порядка от a_i должны удовлетворять условию Гельдера в $\overline{\Omega}$, а производные первого порядка от a непрерывны в $\overline{\Omega}$. Функция $y_n = \omega(y_1, \ldots, y_{n-1})$ должна иметь непрерывные производные до четвертого порядка.

** В статье [4] эта теорема дана для оператора Лапласа. В указываемом здесь объеме она была доказана мною и использована при исследовании рядов Фурье для гиперболических уравнений [5].

*** В статье [4] по недосмотру автора указано $\left[\frac{k}{2}\right]$ вместо $\left[\frac{k-1}{2}\right]$.

а для интеграла $R_l(u)$ справедлива следующая оценка:

$$|R_l(u)| \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon} \sum_{s=0}^{l} I_s(u) + c_1 \varepsilon I_{l+1}(u), \tag{4}$$

имеющая место для любого $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Далее из (3) и (4) следуют неравенства

$$\sum_{s=1}^{2r+1} I_s(u) \leqslant c_r \sum_{s=0}^{r} [I_1(L^s u) + I_0(L^s u)] \qquad \text{для } k = 2r+1;$$

$$\sum_{s=1}^{2r} I_s(u) \leqslant c_r \sum_{s=0}^{r} I_0(L^s u) + c_r \sum_{s=0}^{r-1} I_1(L^s u) \quad \text{для } k = 2r.$$

При $k = 2$ из этой теоремы следует, что для $u \in \overset{0}{\mathscr{L}}$ имеет место неравенство

$$I_2(u) \leqslant c_2 [I_0(Lu) + I_1(u) + I_0(u)].$$

Но известно, что

$$I_1(u) \leqslant c_3 [I_0(Lu) + I_0(u)], \quad \text{если } u \in \overset{0}{\mathscr{L}},$$

и так как, в силу (2),

$$I_0(u) \leqslant c' I_0(Lu),$$

то

$$I_0(u) + I_1(u) + I_2(u) \leqslant c_4 I_0(Lu). \tag{5}$$

Неравенство (5), справедливое для любой функции из $\overset{0}{\mathscr{L}}$, будет тем самым справедливым и для функции из W.

Возьмем теперь последовательность $u_p(y)$ из W такую, что $f_p = Lu_p$ сходятся в норме H к какой-нибудь функции $f \in H$. Тогда из неравенства (4) следует, что

$$|u_p - u_q|_W \to 0 \quad \text{при } p,\ q \to \infty,$$

т. е. предельная для $u_p(x)$ функция $u(x)$ будет также принадлежать W и равенство $Lu = f$ выполняется почти всюду в Ω. Итак, теорема 1 доказана.

Аналогичное утверждение справедливо и для линеала $\overset{0}{\mathscr{L}}{}'$, элементы которого удовлетворяют другому граничному условию, именно:

$$\left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\mathbf{n},\ x_j) + hu \right\}_S = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

Поступило
18 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, § 55, 1950. [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, изд. ЛГУ, § 8, 1950. [3] G. Giraud, Ann. de l'Ec. Norm. (3), 46 (1929). [4] О. Ладыженская, ДАН, 75, № 6 (1950). [5] О. Ладыженская, Усп. матем. наук, 6, в. 1 (41), 168 (1951).