Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

М. К. КЕРИМОВ

ОБ УСЛОВИИ ЯКОБИ ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 9 VI 1951)

В нашей заметке [1] были перечислены необходимые условия экстремума для разрывной вариационной задачи с подвижными концами, причем условие Якоби было сформулировано в терминах знака второй вариации. Здесь мы хотим сформулировать это условие в терминах фокальных точек и собственных значений. Наши исследования существенным образом опираются на методы, примененные в работах [2-4] для обычных вариационных задач.

Давая определение фокальных точек кривых L_1 и L_2 с помощью разрывного решения склеенного уравнения Эйлера, мы доказываем следующее утверждение:

Условие Якоби в терминах фокальных точек. *Пусть неособая ломаная экстремаль E_{102} пересекается кривыми L_1, L_0, L_2 с соблюдением условий трансверсальности и условия разрыва соответственно в точках* 1, 2, 0. *Пусть E_{102} удовлетворяет условию* (III) [1].

Тогда для того, чтобы вторая вариация $J_2(\eta, \tau)$ вдоль E_{102} была неотрицательна, необходимо, чтобы между точками 1 *и* 2 *на E_{102} отсутствовали фокальные точки кривых L_1 и L_2.*

Для того чтобы вторая вариация $J_2(\eta, \tau)$ была положительна, необходимо, чтобы на E_{102} отсутствовали фокальные точки кривых L_1 и L_2 в закрытом отрезке от 1 *до* 2.

Впервые это условие было доказано при сильных ограничениях (посредством теоремы об огибающей) в работе [5].

Можно доказать также более сильное утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы вторая вариация $J_2(\eta, \tau)$ была неотрицательна, необходимо и достаточно, чтобы кривые L_1 и L_2 не имели фокальных точек на E_{102} и для разрывных решений $u(x)$ и $v(x)$ склеенного уравнения Эйлера, нули которых определяют фокальные точки кривых L_1 и L_2, выражение $vu' - v'u$ либо равнялось нулю, либо имело тот же знак, что и произведение uv для любого значения x из интервала (x_1, x_0) или (x_0, x_2).*

Для того чтобы вторая вариация $J_2(\eta, \tau)$ была положительна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись требования первой части теоремы с добавочным условием, что $vu' - uv' \neq 0$ для любого x из упомянутых интервалов (ср. [4], стр. 217).

Из этой теоремы, в частности, вытекает для разрывной задачи аналог известного необходимого условия Блисса о распределении фокальных точек в задачах с двумя подвижными концами.

Теперь дадим условие Якоби в терминах собственных значений Рассматривая функционал

$$I(\eta, \tau, \lambda) = b_1\tau_1^2 + (\bar{b}_0 + \overset{+}{b}_0)\tau_0^2 + b_2\tau_2^2 +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_0} [2\bar{\omega}(x, \bar{\eta}, \bar{\eta}') - \lambda\bar{\eta}^2]\, dx + \int_{x_0}^{x_2} [2\overset{+}{\omega}(x, \overset{+}{\eta}, \overset{+}{\eta}') - \lambda\overset{+}{\eta}^2]\, dx \tag{1}$$

с условиями (А)([1]) и сформулировав для него вторичную разрывную задачу, убеждаемся, что совокупность $\eta(x)$, τ_1, τ_0, τ_2, которая реализует минимум функционала $I(\eta, \tau, \lambda)$, должна удовлетворять граничной задаче

$$\frac{d}{dx}\omega_{\eta'} - \omega_\eta + \lambda\eta = \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\bar{\omega}_{\bar{\eta}'} - \bar{\omega}_{\bar{\eta}} + \lambda\bar{\eta} = 0, \\ \dfrac{d}{dx}\overset{+}{\omega}_{\overset{+}{\eta}'} - \overset{+}{\omega}_{\overset{+}{\eta}} + \lambda\overset{+}{\eta} = 0, \end{cases}$$

$$\bar{\eta}(x_1) = C_1\tau_1, \quad \bar{\eta}(x_0) = \bar{C}_0\tau_0, \tag{2}$$
$$\overset{+}{\eta}(x_0) = \overset{+}{C}_0\tau_0, \quad \overset{+}{\eta}(x_2) = C_2\tau_2,$$
$$C_1\bar{\omega}_{\bar{\eta}'}(x_1) = b_1\tau_1,$$
$$C_2\overset{+}{\omega}_{\overset{+}{\eta}'}(x_2) = -b_2\tau_2,$$
$$\bar{C}_0\bar{\omega}_{\bar{\eta}'}(x_0) - \overset{+}{C}_0\overset{+}{\omega}_{\overset{+}{\eta}'}(x_0) = -(\bar{b}_0 + \overset{+}{b}_0)\tau_0.$$

Уравнение $\frac{d}{dx}\omega_{\eta'} - \omega_\eta + \lambda\eta = 0$ мы будем называть склеенным уравнением Штурма — Лиувилля.

Совокупность $\eta(x) \not\equiv 0$, τ_1, τ_0, τ_2, удовлетворяющая граничной задаче (2) с некоторым значением λ, назовем собственной функцией, а соответствующее ей значение λ — собственным значением.

Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы вторая вариация $I(\eta, \tau, 0) = J_2(\eta, \tau)$ была неотрицательна в классе всех допустимых совокупностей вариаций $\eta(x)$, τ_1, τ_0, τ_2, удовлетворяющих условиям* (А), *необходимо и достаточно, чтобы наименьшее собственное значение λ_1 граничной задачи* (2), *связанной со второй вариацией, было неотрицательным.*

Для того чтобы вторая вариация $J_2(\eta, \tau)$ в классе тех же совокупностей вариаций была положительна, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $\lambda_1 > 0$.

В доказательство теоремы 2 используются следующие вспомогательные утверждения. Сначала мы даем теорию Гамильтона — Якоби для первичной и вторичной разрывных задач. В частности, доказываем, что существует семейство канонических экстремалей

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x, a, b), \\ z &= z(x, a, b), \end{aligned}\right\} \quad x_1(\alpha) \leqslant x \leqslant x_2(\gamma), \tag{3}$$

содержащее E_{102} при $a = a_0$, $b = b_0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_0$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$, причем в (3) функция $z(x, a, b)$ имеет разрыв 1-го рода при $x = x_0(\beta)$, подчиненный первичному условию разрыва ([1]).

Далее мы строим аналог известной квадратичной формы Морса ([3]), заменяющей вторую вариацию в задачах с подвижными концами, именно, форму $Q(\tau_1, \tau_0, \tau_2, \lambda)$.

Функционал $I(\eta, \tau, \lambda)$ будем называть положительно определенным относительно заданного λ и условий (A), если он положителен для любой разрывной функции $\eta(x)$ класса D^1*, удовлетворяющей условиям (A), причем $\eta(x) \not\equiv 0$.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Если кривая E_{102} не касательна к кривым L_1, L_0, L_2 и удовлетворяет усиленному условию Лежандра (III'), то для достаточно больших по абсолютному значению и отрицательных λ функционал $I(\eta, \tau, \lambda)$ будет положительно определенным.*

Следствие. При достаточно больших по абсолютному значению и отрицательных λ квадратичная форма $Q(\tau_1, \tau_0, \tau_2, \lambda)$ существует и является положительно определенной.

Лемма 2. *Если $\eta(x)$ — собственная функция, удовлетворяющая граничной задаче* (2) *с постоянными τ_1, τ_0, τ_2 и λ, то для этих постоянных выполняется равенство:*

$$I(\eta, \tau, \lambda) = 0. \tag{4}$$

Наконец, нам нужна еще следующая лемма.

Лемма 3. *Наименьшая верхняя грань λ_1 значений λ, для которых функционал $I(\eta, \tau, \lambda)$ является положительно определенным, есть собственное значение граничной задачи* (2).

Из теоремы 2 сразу следует

Необходимое условие Якоби в терминах собственных значений. *Для того чтобы кривая E_{102}, о которой говорилось выше, реализовала минимум функционала J, необходимо, чтобы имело место неравенство $\lambda_1 \geqslant 0$, где λ_1 — наименьшее собственное значение граничной задачи* (2), *связанной со второй вариацией $J_2(\eta, \tau)$.*

Нетрудно доказать, что найденное условие Якоби в терминах собственных значений эквивалентно упомянутому аналогу условия Блисса для задач с двумя подвижными концами.

Далее мы можем доказать, что вся экстремальная и минимаксная теория собственных значений, приведенная в ([2], [6]) для обычных задач, обобщается на разрывные задачи рассматриваемого типа.

Если кривая разрыва L_0 вырождается в прямую $x = x_0$, то вся теория разрывной задачи значительно упрощается. В частности, в условиях для концов (A) при $x = x_0$ мы имеем

$$\bar{\eta}(x_0) = \overset{+}{\eta}(x_0) = \tau_0, \tag{5}$$

т. е. теперь допустимые функции для вторичной разрывной задачи сами являются непрерывными, а их производные при $x = x_0$ претерпевают разрыв 1-го рода. Кроме того, в выражении для $J_2(\eta, \tau)$ мы имеем $\bar{b}_0 + \overset{+}{b}_0 = 0$, поэтому условие разрыва для вторичной разрывной задачи принимает вид:

$$\bar{\omega}_{\bar{\eta}'}[x_0, \bar{\eta}(x_0), \bar{\eta}'(x_0)] - \overset{+}{\omega}_{\overset{+}{\eta}'}[x_0, \overset{+}{\eta}(x_0), \overset{+}{\eta}'(x_0)] = 0. \tag{6}$$

Наконец, для разрывной задачи рассматриваемого типа можно исследовать случай периодических экстремалей и доказать соответствующие теоремы 1 и 2.

---

* Когда мы говорим, что разрывная функция $\eta(x)$ принадлежит классу D^1, то это значит, что $\eta(x)$ имеет разрыв 1-го рода при $x = x_0$, а $\bar{\eta}(x)$ и $\overset{+}{\eta}(x)$ принадлежат классу D^1.

Исходя из сказанного выше и результатов работы ([1]), можно сделать вывод:

Необходимые условия экстремума в разрывной вариационной задаче с подвижными концами. *Для того чтобы допустимая кривая E_{102} реализовала слабый относительный минимум функционала J, необходимо, чтобы она удовлетворяла условиям* (I), (I′), (I″), (III) *и* (IV). *Для того чтобы E_{102} реализовала сильный минимум функционала J, необходимо, чтобы она, кроме перечисленных условий, удовлетворяла и условию* (II).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
25 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. К. Керимов, ДАН, 79, № 4 (1951). [2] М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Курс вариационного исчисления, М. — Л., 1950. [3] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, N.-Y., 1934. [4] Г. Блисс, Лекции по вариационному исчислению, М., 1950. [5] M. Mason and G. Bliss, Trans. Am. Math. Soc., 7, 325 (1906). [6] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, М., 1950.