Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. П. ВОСКРЕСЕНСКИЙ и В. И. СОБОЛЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 26 V 1951)

Одним из нас ([1]) было доказано существование не менее счетного числа определенным образом нормированных решений уравнения

$$\mu x(t) = \int_B K(t, s)\, g(s, x(s))\, ds \tag{1}$$

для случая симметрического ядра $K(t, s)$ и при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на это ядро и функцию $g(t, u)$. М. М. Вайнберг ([2]) обобщил этот результат, освободившись от части ограничений, но сохраняя предположения о симметричности ядра. Ниже показывается, что результат М. М. Вайнберга можно распространить на случай ядер вида $K(t, s) = a(t)\, b(s)\, Q(t, s)$, где $Q(t, s)$ — симметрическое ядро.

Итак, пусть B — некоторая область n-мерного евклидова пространства, $Q(t, s)$ — невырожденное симметрическое ядро с суммируемым на B квадратом и $\{\lambda_i\}$ и $\{\varphi_i(t)\}$ — собственные значения и функции в смысле теории линейных интегральных уравнений этого ядра, причем $0 < \lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}$. Функцию $g(t, u)$, $t \in B$, $-\infty < u < \infty$, предполагаем измеримой по t, непрерывной по u почти для всех $t \in B$ и такой, что оператор

$$\Gamma x = g(t, x(t))$$

есть непрерывный оператор, преобразующий пространство $L_2(B)$ само в себя ([3]); кроме того, считаем, что $g(t, -u) = -g(t, u)$ и $g(t, u)u > 0$ для $u \neq 0$. Пусть, наконец, $a(t)$ и $b(t)$ — измеримые ограниченные положительные на B функции.

Рассмотрим оператор

$$y = Ax, \quad x = \{\xi_i\} \in l_2, \quad y = \{\eta_i\},$$

$$\eta_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_B g\left(t, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j}{\sqrt{\lambda_j}} \psi_j(t)\right) \chi_i(t)\, dt,$$

где $\psi_i(t) = a(t)\, \varphi_i(t)$, $\chi_i(t) = b(t)\, \varphi_i(t)$, преобразующий пространство l_2 само в себя, и функционал

$$f(x) = \int_B G\left(t, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j}{\sqrt{\lambda_j}} \psi_j(t)\right) \frac{b(t)}{a(t)}\, dt,$$

где $G(t,u)=\int\limits_0^u g(t,v)\,dv$, определенный на том же пространстве. Пользуясь некоторыми результатами работ М. М. Вайнберга [4] и М. А. Красносельского [5], можно показать, что $f(x)$ дифференцированный функционал $df(x,h)=(Ax,h)$ и что остаток дифференциала этого функционала ограничен в любой сфере $S(\theta, r)$. Очевидно также, что $f(x)=f(-x)\geqslant 0$ и что $f(x)$ и $\|Ax\|$ обращаются в нуль при $x=\theta$. Но тогда к оператору A применима теорема 2 работы [1] и, следовательно, оператор A имеет на любой сфере $\|x\|_{l_2}=c$ не менее счетного числа геометрически различных собственных элементов x_n:

$$\mu_n \xi_i^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\int\limits_B g\left(s, \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j^{(n)}}{\sqrt{\lambda_j}}\psi_j(s)\right)\chi_i(s)\,ds; \quad i, n=1, 2, \ldots$$

Умножая это равенство на $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\psi_i(t)$ и суммируя по i, получим, что

$$\mu_n\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_j^{(n)}\psi_i(t)}{\sqrt{\lambda_j}}=\int\limits_B K(t,s)\,g\left(s, \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j^{(n)}\psi_j(s)}{\sqrt{\lambda_j}}\right)ds,$$

или

$$\mu_n x_n(t)=\int\limits_B K(t,s)\,g(s, x_n(s))\,ds,$$

где

$$x_n(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j^{(n)}\psi_j(t)}{\sqrt{\lambda_j}}, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\left(\xi_j^{(n)}\right)^2=c^2,$$

т. е. что уравнение (1) при сделанных предположениях имеет не менее счетного числа определенным образом нормированных решений.

Поступило
24 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Соболев, ДАН, 71, № 5 (1950). [2] М. М. Вайнберг, ДАН, 75, № 5 (1950). [3] М. А. Красносельский, ДАН, 77, № 2 (1951). [4] М. М. Вайнберг, Матем. сборн., 26 (68), № 3, 365 (1950). [5] М. А. Красносельский, ДАН, 73, № 1 (1950).