Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 4

ФИЗИКА

М. Л. ЛЕВИН

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОПЕРЕЧНО-ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ПОПЕРЕЧНО-МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 7 VI 1951)

Пусть u, v, w — криволинейные ортогональные координаты в пространстве:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w),$$

а

$$e_u^2 = (\mathbf{r}_u)^2, \quad e_v^2 = (\mathbf{r}_v)^2, \quad e_w^2 = (\mathbf{r}_w)^2$$

соответствующие им метрические коэффициенты. Для того чтобы эта система координат допускала существование электромагнитных полей общего вида, у которых или электрический или магнитный вектор не имеет продольной w-составляющей, метрические коэффициенты должны удовлетворять условиям (см., например, [1]):

$$e_w = 1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\frac{e_u}{e_v} = 0. \tag{2}$$

Целью настоящей заметки является выяснение геометрического смысла этих условий.

Из первого условия, выражающего собой эквидистантность семейства поверхностей $w = \mathrm{const}$, сразу следует (см., например, [2]), что ортогональные этому семейству w-линии (линии $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$) суть прямые.

Выберем какую-нибудь из поверхностей $w = \mathrm{const}$ за основную и будем отсчитывать координату w от этой поверхности. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(u, v)$ — уравнение выбранной нами поверхности, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ — единичный вектор нормали к ней, направленный в сторону убывания координаты w. Зависимость радиуса-вектора $\mathbf{r}$ от криволинейных координат u, v, w дается, в нашем случае, формулой

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \mathbf{r}_0(u, v) - w\mathbf{n}(u, v),$$

и, следовательно, квадраты интересующих нас метрических коэффициентов равны

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_u)^2 &= E + 2Dw + ew^2, \\ (\mathbf{r}_v)^2 &= G + 2D''w + gw^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где мы ввели обычные обозначения для коэффициентов первой, второй и третьей крадратичных форм основной поверхности:

$$E = (\mathbf{r}_{0u})^2, \quad D = -\mathbf{r}_{0u}\mathbf{n}_u, \quad e = (\mathbf{n}_u)^2,$$
$$G = (\mathbf{r}_{0v})^2, \quad D'' = -\mathbf{r}_{0v}\mathbf{n}_v, \quad g = (\mathbf{n}_v)^2.$$

Так как, по теореме Дюпена, линии u и v на основной поверхности суть линии кривизны ([3]), то

$$e = k_1 D = k_1^2 E, \quad g = k_2 D'' = k_2^2 G,$$

где $k_1(u, v)$, $k_2(u, v)$ — главные кривизны основной поверхности. Поэтому формулы (3) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} e_u^2 &= E(u, v)\,[1 + k_1(u, v)\,w]^2, \\ e_v^2 &= G(u, v)\,[1 + k_2(u, v)\,w]^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Требуя теперь выполнения условия (2), мы сразу получим

$$k_1(u, v) = k_2(u, v),$$

т. е. все точки поверхности $w = 0$ являются омбилическими (точками закругления). Но, как известно, это может быть только в том случае, если эта поверхность есть сфера или плоскость.

Таким образом, геометрический смысл условий (1), (2) состоит в том, что поверхности $w = \text{const}$ суть или концентрические сферы, или параллельные плоскости. Поэтому нет надобности строить общую теорию волноводов с пропорционально меняющимся сечением ([1]), в которой цилиндрические и конические волноводы фигурируют лишь как частные, иллюстрирующие общую теорию случаи.

В заключение отметим, что если заменить условие (2) условием существования главных волн в обобщенных линиях передачи, имеющим вид ([4])

$$\frac{e_u}{e_v} = A(u, v)\,B(w),$$

то это последнее может выполняться, как легко видеть, или когда $k_1 = k_2$ (уже разобранный случай), или когда одна из главных кривизн равна нулю, а другая не зависит от координат u, v (поверхности $w = \text{const}$ суть концентрические круговые цилиндры). Аналитическое доказательство этого результата, приведенное в работе ([4]), более громоздко, чем данное здесь.

Поступило
24 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, Л., 1949. [2] М. Борн, Оптика, 1937. [3] А. П. Норден, Дифференциальная геометрия, 1948. [4] М. Е. Жаботинский, М. Л. Левин и С. М. Рытов, ЖТФ, **20**, 257 (1950).