Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 4

ФИЗИКА

Л. М. БРЕХОВСКИХ

ДИФФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 1 VI 1951)

Будем искать звуковое поле в точке P, заданной прямоугольными координатами x_i (индекс i всюду пробегает значения 1, 2, 3). Координаты точек поверхности в той же системе координат будем обозначать через X_i. Уравнение поверхности пусть будет

$$X_3 = \zeta(X_1, X_2), \tag{1}$$

причем функция ζ предполагается периодической по отношению к обоим аргументам. Падающую звуковую волну зададим в виде $e^{jk_i^0 x_i}$ (суммирование по дважды повторяющемуся значку подразумевается).

Для звукового потенциала рассеянной волны в точке P имеем по теореме Грина:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{jkR}}{R}\right) - \frac{e^{jkR}}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right] dS; \tag{2}$$

R — расстояние между точкой P и текущей точкой (X_1, X_2, X_3) на поверхности, n — внутренняя нормаль к поверхности.

Для каждой точки на поверхности введем местную прямоугольную систему координат x_i' с началом координат в этой точке и осью x_3' направленной по нормали к поверхности. Координаты x_i' связаны с x_i соотношениями

$$x_i = X_i + \beta_{ik} x_k', \quad \beta_{ik} = \cos(\widehat{x_i x_{k'}}). \tag{3}$$

Здесь индекс k, как и i, пробегает значения 1, 2, 3.

Теперь падающая волна будет

$$e^{jk_i^0 X_i + j\beta_{ik} k_i^0 x_{k'}}. \tag{4}$$

Основным в нашей теории является предположение, что для вычисления φ и $\partial\varphi/\partial n$ на границе достаточно взять в каждой точке границы сумму падающей и отраженной плоских волн. Мы не будем обсуждать здесь границы применимости этого предположения. В известном смысле оно аналогично предположению Кирхгофа в обычной теории диффракции.

Учитывая известные законы отражения плоских волн, а также, что координата x_3' направлена по нормали, получаем для полного поля вблизи границы:

$$\varphi = e^{jk_i^0 X_i + k_i^0 \beta_{lk} x_k'} \left[e^{jk_i^0 \beta_{i3} x_3'} + V(\gamma)\, e^{-jk_i^0 \beta_{i3} x_3'} \right], \tag{5}$$

где $\gamma = \arccos \frac{k_i^0 \beta_{i3}}{k}$ — угол падения волны, зависящий от наклона поверхности в данной точке; $V(\gamma)$ — коэффициент отражения, в общем случае зависящий от угла падения. Индекс k в (5) пробегает лишь значения 1 и 2.

Определяя из (5) $\varphi_{x_i'=0}$ и $\partial\varphi / \partial n = (\partial\varphi / \partial x_3')_{x_i'=0}$, подставляя в (2) и учитывая, кроме того, что в (2) $dS = dX_1 dX_2 / \beta_{33}$, получаем

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dX_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dX_2 \left[(1 + V) \frac{\partial}{\partial x_3'} \left(\frac{e^{jkR}}{R} \right) - \right.$$

$$\left. - jk_i^0 \beta_{i3} (1 - V) \frac{e^{jkR}}{R} \right] \frac{e^{jk_i^0 X_i}}{\beta_{33}}. \tag{6}$$

Представим здесь e^{jkR} / R в виде разложения по плоским волнам:

$$\frac{e^{jkR}}{R} = \frac{j}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{jk_i (x_i - X_i)} \frac{dk_1 dk_2}{k_3}, \quad k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2, \tag{7}$$

и соответственно учитывая, что $\partial x_i / \partial x_3' = \beta_{i3}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_3'} \left(\frac{e^{jkR}}{R} \right) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} k_i \beta_{i3}\, e^{jk_i (x_i - X_i)} \frac{dk_1 dk_2}{k_3}.$$

Теперь (5) записывается:

$$\varphi(P) = \frac{1}{8\pi^2} \iiiint_{-\infty}^{+\infty} [(1 - V)\, k_i^0 \beta_{i3} -$$

$$- (1 + V)\, k_i \beta_{i3}]\, e^{j(k_i^0 - k_i) X_i + jk_i x_i} \frac{dk_1 dk_2 dX_1 dX_2}{k_3 \beta_{33}}. \tag{8}$$

Предположим, что нам известно разложение в двойной ряд Фурье:

$$\frac{1}{2\beta_{33}} [(1 - V)\, k_i^0 \beta_{i3} - (1 + V)\, k_i \beta_{i3}]\, e^{j(k_3^0 - k_3) X_3} =$$

$$= \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} B_{mn}(k_i)\, e^{j(mpX_1 + nqX_2)}, \tag{9}$$

где p и q — величины, с точностью до множителя 2π равные обратным пространственным периодам неровности в направлениях X_1 и X_2. Координата X_3 в левой части (9) предполагается выраженной в виде (1).

Подставив (9) под интеграл в (8), мы получаем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(k_1^0 - k_1 + mp) X_1} dX_1 = \frac{2\pi}{k}\, \delta \left(\frac{k_1^0 - k_1 + mp}{k} \right),$$

и аналогично для индекса 2. Остающиеся интегралы по k_1 и k_2, при учете свойств функции Дирака δ, берутся элементарно. В результате получаем:

$$\varphi(P) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \frac{B_{mn}(k_i^{mn})}{k_3^{mn}} e^{jk_i^{mn} x_i}, \qquad (10)$$

где

$$k_1^{mn} = k_1^0 + mp,\ k_2^{mn} = k_2^0 + nq,\ k_3^{mn} = \sqrt{k^2 - (k_1^0 + mp)^2 + (k_2^0 + nq)^2}. \qquad (11)$$

Таким образом, мы представили рассеянное поле в виде совокупности спектров, как и в известной работе Рэлея [1]. Амплитуда каждого спектра дается выражением

$$A_{mn} = \frac{B_{mn}(k_i^{mn})}{k_3^{mn}}. \qquad (12)$$

Рассмотрим частный случай $V = -1$ (абсолютно мягкая граница). Как показывается в дифференциальной геометрии

$$\frac{\beta_{13}}{\beta_{33}} = \frac{\partial X_3}{\partial X_1} = \zeta_1(X_1, X_2), \quad \frac{\beta_{23}}{\beta_{33}} = \frac{\partial X_3}{\partial X_2} = \zeta_2(X_1, X_2), \qquad (13)$$

где через ζ_1 и ζ_2 обозначены тангенсы углов наклона поверхности, соответственно, в сечениях $X_2 = \text{const}$ и $X_1 = \text{const}$.

Уравнение (9) для определения B_{mn} теперь запишется:

$$(k_1^0\zeta_1 + k_2^0\zeta_2 + k_3^0)\, e^{j(k_3^0 - k_3)\zeta} = \sum_{mn} B_{mn}(k_3)\, e^{j(mpX_1 + nqX_2)}. \qquad (14)$$

Обозначим через $B_{mn}^0(k_3)$ вспомогательные коэффициенты, определяющиеся разложением

$$e^{j(k_3^0 - k_3)\zeta(X_1 X_2)} = \sum B_{mn}^0 e^{j(mpX_1 + nqX_2)}. \qquad (15)$$

Комбинируя последнее выражение с его производными по X_1 и X_2, нетрудно показать, что B_{mn} выражается через B_{mn}^0 следующим образом:

$$B_{mn} = \left[k_3^0 + \frac{k_1^0 mp + k_2^0 nq}{k_3^0 - k_3^{mn}}\right] B_{mn}^0. \qquad (16)$$

В случае $V = 1$ (абсолютно твердая граница) соответствующее выражение записывается

$$B_{mn} = \left[k_3 + \frac{k_1 mp + k_2 nq}{k_3^0 - k_3^{mn}}\right] B_{mn}^0. \qquad (17)$$

Таким образом, вся задача сводится к отысканию коэффициентов разложения B_{mn}^0 в (15) (причем $k_3^0 - k_3$ рассматривается как постоянная). В произвольном случае это может быть выполнено любым из методов гармонического анализа.

Если волнистость является синусоидальной в обоих направлениях, т. е.

$$\zeta = a\cos pX_1 + b\cos qX_2, \qquad (18)$$

то, воспользовавшись известной формулой

$$e^{js\cos px} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} j^m J_m(s)\, e^{jmpx}, \qquad (19)$$

мы получаем для коэффициентов B_{mn}^0

$$B_{mn}^0 = j^{m+n} J_m[a(k_3^0 - k_3^{mn})]\, J_n[b(k_3^0 - k_3^{mn})]. \qquad (20)$$

После этого, воспользовавшись последовательно формулами (16) или (17) и (12), мы найдем амплитуды всех спектров. Так например, в случае $V = -1$:

$$A_{mn} = \frac{j^{m+n}}{k_3^{mn}} \left[k_3^0 + \frac{k_1^0 mp + k_2^0 nq}{k_3^0 - k_3^{mn}} \right] J_m \left[a (k_3^0 - k_3^{mn}) \right] J_n \left[b (k_3^0 - k_3^{mn}) \right]. \quad (21)$$

Небезынтересно отметить, что при таком падении первичной плоской волны, когда определенные части поверхности оказываются в тени, последовательное применение нашего принципа, аналогичного принципу Кирхгофа, приводит к тому, что левые части уравнений (9) или (14) должны быть домножены на функцию $\eta(X_1, X_2)$, имеющую тот же период, что и период неровности, и равную единице в освещенной зоне и нулю в тени. Метод расчета допускает введение и более сложных «функций затенения», характеризующих изменение силы звука при переходе в тень.

В литературе имеется лишь расчет Рэлея (1) для нормального падения волны на поверхность с одномерной синусоидальной волнистостью и амплитудой волнистости, малой по сравнению с длиной волны и звука. У нас для одномерной синусоидальной волнистости ($b = 0$) и нормального падения ($k_1^0 = k_2^0 = 0$, $k_3^0 = -k$) получается из (21)

$$A_m = (-j)^m \frac{k}{k_3^{(m)}} J_m \left[a (k + k_3^{(m)}) \right],$$

или, учтя, что $k_3^m / k = \sin\alpha^{(m)}$, где $\alpha^{(m)}$ — угол скольжения (m)-го спектра, получаем

$$A_{(m)} = (-j)^m \frac{1}{\sin\alpha^{(m)}} J_m \left[ak (1 + \sin\alpha^{(m)}) \right]. \quad (22)$$

Если $ak \ll 1$, то амплитуды спектров быстро убывают с увеличением их номера, и для вычисления поля можно ограничиться малыми номерами m. Для последних можно считать $k_3^{(m)} \cong k$, $\sin\alpha^{(m)} \cong 1$, и мы получаем результат Рэлея

$$A_m = (-j)^m J_m (2ak). \quad (23)$$

В заключение представим себе, что мы решили задачу о рассеянии на некоторой одномерной волнистости $\zeta(X_1)$ и, следовательно, нашли коэффициенты B_m^0 в (15). Как изменятся амплитуды спектров, если на эту волнистость дополнительно наложится косинусоида $c \cos \nu p X_1$ с периодом в целое число ν раз меньшим периода ζ?

Нетрудно показать, исходя из (15), что новые коэффициенты C_m^0, аналогичные B_m^0, будут

$$C_m^0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} j^k J_k \left[c (k_3^0 - k_3^{(m)}) \right] B_{m-k\nu}^0. \quad (24)$$

Как известно, мелкая регулярная рябь на плоской поверхности не дает никакого рассеяния, если длина волны ряби меньше длины волны звука. Из формулы (24) следует, что если такая же рябь наложена на крупную неровность, она дает дополнительное рассеяние.

Изложенная теория может быть обобщена и на случай электромагнитных волн.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
24 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Дж. В. Рэлей, Теория звука, 2, 1944.