Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 4

ГИДРАВЛИКА

Н. Н. ВЕРИГИН

О ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ КАНАЛА В СУХОЙ ГРУНТ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 1 VI 1951)

В каналах, проложенных в сухих грунтах, фильтрационные воды в начале движутся сверху вниз, довольно быстро достигают ближайшего слабо проницаемого пласта и затем медленно растекаются по нему в обе стороны от канала. В соответствии с этим фильтрацию из канала в сухих грунтах допустимо рассматривать как явление растекания фильтрационных вод по горизонтальному непроницаемому основанию. Приближенно можно принять, что это растекание происходит под влиянием постоянного напора h_2, мгновенно созданного в вертикальной плоскости OO, проходящей через урез воды в канале (рис. 1).

Если горизонтальные составляющие скорости фильтрации считать постоянными по глубине потока, то явление растекания будет описываться следующим нелинейным уравнением Буссинеска ([1]):

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial\,(h\,\partial h\,/\,\partial x)}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < l\,(t), \tag{1}$$

где h — глубина (напор) потока в сечении с абсциссой x в момент времени t; k — коэффициент фильтрации; μ — дефицит насыщения грунта; $l\,(t)$ — длина растекания фильтрационных вод от канала.

Начальные и граничные условия для данной задачи будут: начальное условие:

$$h\,(x,\,0) = 0; \tag{2}$$

граничное условие в плоскости уреза воды в канале OO:

$$h\,(0,\,t) = h_2 = \text{const}; \tag{3}$$

условия на границе растекания:

$$h\,(l,\,t) = 0, \tag{4}$$

$$\mu\frac{dl}{dt} = -k\,\frac{\partial h\,(l,\,t)}{\partial x}\,. \tag{5}$$

Если условие (4) дифференцировать по t и ввести туда (5), то будет

$$\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial h\,(l,\,t)}{\partial x}\right]^2 - \frac{\partial h\,(l,\,t)}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Отметим, что условие (6), полученное из (4) и (5), заменяет собою уравнение (5), но условие (4) при этом остается необходимым. Иначе говоря, для единственности решения задачи необходимы и достаточны условия (2) — (4), а также (5) или (6).

При таких условиях задача о растекании фильтрационных вод в сухом грунте может быть решена тем же методом, что был применен П. Я. Полубариновой-Кочиной для рассмотрения неустановившегося движения грунтовой воды в полубесконечном водоносном слое ([2]).

Вводя в (1) подстановку

$$h = u(\lambda) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \tag{7}$$

где $a = kh_2/\mu$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными u и λ.

Решение этого уравнения можно представить в виде:

$$u = h_2\,[1 + \alpha F(\lambda, \alpha)], \quad F(\lambda, \alpha) = u_0(\lambda) + \alpha u_1(\lambda) + \alpha^2 u_2(\lambda) + \ldots, \tag{8}$$

где α — параметр, а u_1, u_2 и т. д. — некоторые функции λ.

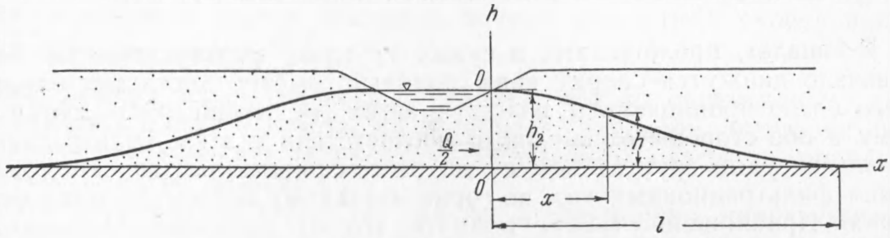

Рис. 1

Так например, функции u_0 и u_1 будут (2):

$$u_0 = \Phi(\lambda), \quad u_1 = \frac{1}{\pi}\,(1 - e^{-2\lambda^2}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\lambda e^{-\lambda^2}\Phi(\lambda) - \frac{1}{2}\,\Phi^2(\lambda),$$

где $\Phi(\lambda)$ — функция Крампа.

Подставляя условия (3), (4) и (5) в (8), получим:

$$h = h_2, \tag{9}$$

$$0 = h_2\,[1 + \alpha F(l\,/\,2\sqrt{at}, \alpha)], \tag{10}$$

$$\mu\,\frac{dl}{dt} = -kh_2\alpha \left| \frac{\partial\,[F(x\,/\,2\sqrt{at}, \alpha)]}{\partial x} \right|_{x=l} = -kh_2\alpha F'(\lambda, \alpha)\,\frac{1}{2\sqrt{at}}\,; \tag{11}$$

Здесь

$$F'(\lambda, \alpha) = dF\,/\,d\lambda = u_0'(\lambda) + \alpha u_1'(\lambda) + \alpha^2 u_2'(\lambda) + \ldots,$$

$$\text{причем}\quad u_0' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\lambda^2},\; u_1' = \frac{2}{\pi}\,\lambda e^{-2\lambda^2} - \frac{1}{\pi}\,e^{-\lambda^2}\Phi(\lambda)\,(3 - 2\lambda^2).$$

Равенство (10) при постоянных h_2 и α возможно лишь при условии

$$\frac{l}{2\sqrt{at}} = \beta = \mathrm{const}, \tag{12}$$

где β — параметр, определяющий длину растекания l в зависимости от времени t.

Вводя (12) в (10) и (11), получим следующие уравнения для определения параметров α и β:

$$\alpha = -\frac{1}{F(\alpha, \beta)}, \quad \beta = -\frac{kh_2}{2a}\,\alpha F'(\alpha, \beta) = -\frac{\mu}{2}\,\alpha F'(\alpha, \beta), \tag{13}$$

откуда они находятся последовательными приближениями.

Подставляя значение α из (13) в (8), получим:

$$h = h_2 \left[1 - \frac{F(x/2\sqrt{at}, \alpha)}{F(\beta, \alpha)} \right]. \tag{14}$$

Выше нами были использованы все условия, кроме начального (2).

При $t = 0$ область растекания стягивается в линию OO, и потому тогда $x = 0$ и $l = 0$. В этом случае величина $\lambda = x/2\sqrt{at}$ обращается в неопределенность, раскрытие которой дает:

$$\left| \frac{x}{2\sqrt{at}} \right|_{\substack{t=0\\x=0}} \left| \frac{dx/dt}{\frac{d}{dt}(2\sqrt{at})} \right|_{x=l} = \left| \frac{d(2\beta\sqrt{at})}{d(2\sqrt{at})} \right| = \beta. \tag{15}$$

Но тогда из (14) получается, что $h = 0$. Таким образом, уравнение (14) удовлетворяет всем поставленным условиям.

Если уравнение (1) линеаризировать, то вместо (1) получим:

$$a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0, \tag{16}$$

где $a = kh_s/\mu \cong kh_2/\mu$.

Вводя в (16) подстановку

$$h = u(\lambda) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \tag{17}$$

получим

$$h = A\Phi(\lambda) + C, \tag{18}$$

где A и C — некоторые постоянные.

Подставляя в (18) граничные условия (3) и (4), имеем:

$$h_2 = C, \quad 0 = A\Phi\left(\frac{l}{2\sqrt{at}}\right) + h_2. \tag{19}$$

Последнее равенство возможно лишь при условии

$$\frac{l}{2\sqrt{at}} = \beta = \text{const}, \tag{20}$$

и потому из (19) находим

$$A = -\frac{h_2}{\Phi(\beta)}. \tag{21}$$

Подставляя (18) в (5) или (6) и учитывая (19), (20) и (21), получим уравнение дл определения параметра растекания β:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{kh_2}{a} = \beta e^{\beta^2} \Phi(\beta), \tag{22}$$

или, вводя сюда значение a:

$$\mu = \sqrt{\pi}\, \beta e^{\beta^2} \Phi(\beta). \tag{23}$$

Это же уравнение получается из (13) при $u_1 = u_2 = \cdots = 0$.

Значения параметра растекания β, вычисленные по (23), приводятся в табл. 1.

Таблица 1

μ	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
β	0,073	0,16	0,22	0,27	0,31	0,34	0,37	0,40	0,42	0,45	0,47	0,49	0,51

Вводя значения A и C в (18), получим следующие основные уравнения для расчета растекания фильтрационных вод:
кривая депрессии:

$$h = h_2 \left[1 - \frac{\Phi\,(x \,/\, 2\sqrt{at})}{\Phi\,(\beta)} \right]; \tag{24}$$

потери на фильтрацию из канала (в обе стороны от него):

$$Q = -2kh_2 \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{2kh_2^2}{\Phi\,(\beta)\sqrt{\pi a t}} = \frac{2h_2}{\Phi\,(\beta)} \sqrt{\frac{k\mu h_2}{\pi t}}; \tag{25}$$

длина зоны растекания фильтрационных вод:

$$l = 2\beta\sqrt{at} = 2\beta\sqrt{\frac{kh_2 t}{\mu}}. \tag{26}$$

Если игнорировать граничные условия (4) и (5) и растекание воды рассматривать по уравнению (18), определив постоянные A и C только из условий (2) и (3), то получится, что область растекания протягивается в бесконечность при любом времени t. Таким образом, только введение условий (4) и (5) позволяет получить физически правильную картину явления.

Для строящихся в настоящее время каналов особый практический интерес представляет задача о растекании фильтрационных вод при наличии значительного испарения с поверхности их уровня (ε м³/м² сут.). В этом случае растекание происходит значительно медленнее, так как с течением времени фильтрация из канала уменьшается, а испарение увеличивается ввиду возрастания l. При $t \to \infty$ движение грунтовой воды стремится к некоторому предельному установившемуся движению, соответствующему равенству фильтрации воды из канала и испарению ее со свободной поверхности потока.

Исследование этого вопроса показало, что ширина зоны растекания воды от канала стремится к величине

$$l_{\max} = h_2 \sqrt{\frac{k}{|\varepsilon|}}. \tag{27}$$

Потери на фильтрацию из канала в условиях этого максимального растекания равны

$$Q = 2h_2 \sqrt{k\,|\varepsilon|}. \tag{28}$$

Отметим, что граничные условия типа (4), (5) и описанный здесь способ решения уравнений (1) и (16) при этих условиях имеют значение также при изучении некоторых случаев движения газа и газированных жидкостей в пористой среде.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
ВОДГЕО

Поступило
28 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes, 1877. [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, Прикладн. матем. и мех., **13**, в. 2 (1949).