Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 4

ГИДРОДИНАМИКА

В. Н. ЩЕЛКАЧЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ К КРУГОВОЙ БАТАРЕЕ СТОКОВ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 9 VI 1951)

Исследуем неустановившееся плоско-радиальное движение однородной упругой жидкости по линейному закону фильтрации к круговой батарее n равнодебитных и равноудаленных друг от друга гидродинамически совершенных скважин в однородном упругом пласте бесконечно большой протяженности. В описанных условиях каждую из эксплоатационных скважин достаточно малого радиуса R_c можно рассматривать как линейный сток; исследуя движение в какой-либо одной плоскости, параллельной непроницаемой кровле и подошве пласта, каждую скважину малого радиуса сможем заменить точечным стоком, помещенным в ее центре. Предположим, что все скважины, центры которых расположены на окружности A радиуса R (см. рис. 1), пущены в эксплуатацию одновременно с постоянными дебитами; Q — объемный дебит каждой из n скважин. В начальный момент пуска скважин давление во всех точках пласта считаем одинаковым и равным p_0. После пуска скважин с постоянными дебитами пластовое давление на стенках скважин и вокруг них начнет перераспределяться *; режим пласта будем считать упруго-водонапорным. Задача состоит в том, чтобы после пуска скважин определить давление p (а следовательно, и понижение давления $\Delta p = p_0 - p$) в любой момент времени t в любой точке M пласта, положение которой определяется полярными координатами r и θ.

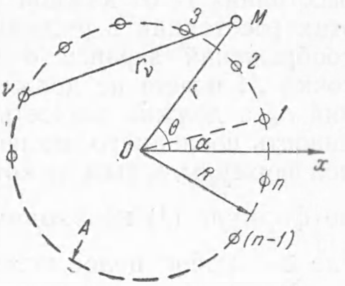

Рис. 1

Занумеруем скважины, обходя окружность A в направлении против часовой стрелки, причем полярный угол центра скважины № 1 (ближайшей к полярной оси в направлении обхода) обозначим через α.

* Имея в виду практическое значение рассматриваемой задачи для технологии нефтедобычи, мы рассматриваем перераспределение пластового давления. При более строгой постановке задачи следовало бы рассматривать перераспределение с течением времени плотности жидкости в пласте, задаваться начальной плотностью, постоянством массового дебита скважин и учитывать, что в условиях упруго-водонапорного режима плотность жидкости удовлетворяет дифференциальному уравнению Фурье. Такое уточнение задачи практически не отразилось бы на картине перераспределения пластового давления, и все выведенные ниже формулы остались бы справедливыми (1).

ЛЭТИИЖТ
БИБЛИОТЕКА
ПЕРИОДИКА

Как известно из теории упругого режима, понижение давления Δp_ν в точке M пласта за счет пуска в эксплуатацию одной из скважин круговой батареи с номером ν определяется следующей формулой ([1]):

$$\Delta p_\nu = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_\nu^2}{4a^2 t}\right)\right], \tag{1}$$

где r_ν — расстояние от точки M до центра скважины (стока) с номером ν; a^2 — коэффициент пьезопроводности пласта; b — мощность пласта; k — коэффициент проницаемости пласта; μ — коэффициент динамической вязкости; Ei — интегральная экспоненциальная функция. Известно, что при $x > 0$ разложение функции $\mathrm{Ei}(-x)$ в ряд имеет вид:

$$\mathrm{Ei}(-x) = C + \ln x + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{(-x)^\sigma}{\sigma\cdot\sigma!}, \tag{2}$$

где C — постоянная Эйлера, $C \cong 0{,}5772$.

Пользуясь методом суперпозиции и формулами (1) и (2), найдем понижение давления Δp в момент t в точке M пласта (внутри или вне батареи) за счет одновременного пуска всех n скважин круговой батареи:

$$\Delta p = \sum_{\nu=1}^{n} \Delta p_\nu = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\sum_{\nu=1}^{n}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_\nu^2}{4a^2 t}\right)\right], \tag{3}$$

$$\Delta p = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\ln\frac{4a^2 t}{r_\nu^2} - C + \sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sigma-1}}{\sigma\cdot\sigma!}\left(\frac{r_\nu^2}{4a^2 t}\right)^\sigma\right]. \tag{4}$$

Сложность подсчетов по формулам (3) и (4) состоит в том, что при большом числе n скважин в круговой батарее приходится определять расстояния r_ν от каждой из скважин до точки M и вводить величины этих расстояний в расчетные формулы. В то же время из физических соображений заранее очевидно, что понижение давления в любой точке M пласта не должно зависеть от величины отдельных расстояний r_ν, а должно зависеть только от величин r, $(\theta-\alpha)$, n, R. Справедливость последнего заключения мы обнаружим при анализе упрощенной формулы, к выводу которой и перейдем. Для выполнения подсчетов по формуле (4) необходимо уметь вычислять величину суммы $\sum\limits_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma}$, где σ — любое целое положительное число, причем

$$r_\nu^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\left[\frac{2\pi}{n}(\nu-1) - (\theta-\alpha)\right]. \tag{5}$$

Искомая сумма четных степеней r_ν определяется следующей выведенной нами формулой:

$$\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{2\sigma} = n\sum_{\varkappa=0}\frac{\sigma!}{(\varkappa!)^2(\sigma-2\varkappa)!}(r^2+R^2)^{\sigma-2\varkappa} r^{2\varkappa}R^{2\varkappa}. \tag{6}$$

Отсутствие верхней границы суммирования в правой части последнего равенства указывает, что суммирование выполняется до первого исчезающего члена, у которого значение $2\varkappa$ оказывается больше σ. Иными словами, верхняя граница суммирования будет $\varkappa = \sigma/2$ для четного σ и $\varkappa = \frac{1}{2}(\sigma-1)$ — для нечетного σ.

В формулу (4) входит еще сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \ln r_\nu^2$, величина которой удовлетворяет равенству ([2]):

$$\sum_{\nu=1}^{n} \ln r_\nu^2 = \ln\left[r^{2n} + R^{2n} - 2r^n R^n \cos n(\theta - \alpha)\right]. \quad (7)$$

С помощью равенств (6) и (7) величины r_ν исключаются из формулы (4), и она принимает вид:

$$\Delta p = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\left[\ln\frac{(4a^2 t)^n}{r^{2n} + R^{2n} - 2r^n R^n \cos n(\theta - \alpha)} - nC + \right.$$

$$\left. + n\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{\varkappa=0} \frac{(-1)^{\sigma-1}(r^2 + R^2)^{\sigma-2\varkappa} r^{2\varkappa} R^{2\varkappa}}{\sigma(\varkappa!)^2(\sigma - 2\varkappa)!\,(4a^2 t)^\sigma}\right]. \quad (8)$$

Формула (8), действительно, позволяет определить понижение давления Δp в любой момент времени t в любой точке M пласта (внутри или вне круговой батареи) в зависимости от r, $(\theta - \alpha)$, n, R. Формулой (8) нельзя пользоваться лишь для определения понижения давления Δp_c на стенке любой из скважин. Если поместить точку M на стенке скважины, то, считая $R_c \ll R$, с высокой степенью точности можно принять ([2]), что $r \cong R$ и

$$\sum_{\nu=1}^{n} \ln r_\nu^2 = 2\ln nR_c R^{n-1}. \quad (9)$$

Исключая величины r_ν из формулы (4) с помощью равенств (6) и (9), получим следующую формулу для понижения давления Δp_c на стенке любой из скважин:

$$\Delta p_c = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\left[\ln\frac{(4a^2 t)^n}{(nR_c R^{n-1})^2} - nC + n\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{\varkappa=0} \frac{(-1)^{\sigma-1} 2^{\sigma-2\varkappa}}{\sigma(\varkappa!)^2(\sigma - 2\varkappa)!}\left(\frac{R^2}{4a^2 t}\right)^\sigma\right]. \quad (10)$$

Перепишем формулу (8) в развернутом виде:

$$\Delta p = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\left\{ n(\ln 4a^2 t - C) - \ln\left[r^{2n} + R^{2n} - 2r^n R^n \cos n(\theta - \alpha)\right] + \right.$$

$$\left. + n\left[\frac{r^2 + R^2}{4a^2 t} - \frac{(r^2+R^2)^2 + 2r^2R^2}{4(4a^2 t)^2} + \frac{(r^2+R^2)^3 + 6(r^2+R^2)r^2R^2}{18(4a^2 t)^3} - \dots\right]\right\}. \quad (11)$$

При достаточно больших значениях времени t ряд, заключенный в квадратных скобках в формуле (11), быстро сходится; при практических расчетах чаще всего бывает вполне достаточно ограничиться лишь первым членом упомянутого ряда. Легко найти такое значение времени $t = t_1$, что при заданной степени точности подсчетов оказывается возможным пренебречь всеми членами ряда, включая первый, если r не слишком велико. Интересно отметить, что первое слагаемое в фигурной скобке формулы (11) не зависит от r. Следовательно, при $t \geqslant t_1$ при увеличении t величина Δp увеличивается на одну и ту же величину при всех тех значениях r (чем больше t_1, тем больше r), при которых было допустимо пренебрегать всеми членами ряда. Это означает, что вокруг батареи скважин образуется постепенно расширяющаяся область, внутри которой пьезометрическая воронка депрессии с течением времени понижается, оставаясь параллельной самой себе.

Обозначим через Q_c суммарный дебит всех равнодебитных скважин батареи, $Q_c = nQ$. Заметим, что в пределе, при $n \to \infty$, величина $\frac{1}{n} \ln [r^{2n} + R^{2n} - 2r^n R^n \cos n(\theta - \alpha)]$ равна $2 \ln R$, если $r < R$, и равна $2 \ln r$, если $r > R$. Полагая в формуле (8) $Q = \frac{1}{n} Q_c$ и совершая переход к пределу при $n \to \infty$, получим следующую приближенную формулу, определяющую понижение давления в любой точке той области пласта (при $r \leqslant R$), которую окружает круговая галлерея радиуса R с дебитом Q_c:

$$\Delta p = \frac{Q_c \mu}{4\pi bk} \left[\ln \frac{4a^2 t}{R^2} - C + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{\varkappa=0} \frac{(-1)^{\sigma-1} (r^2 + R^2)^{\sigma - 2\varkappa} r^{2\varkappa} R^{2\varkappa}}{\sigma (\varkappa !)^2 (\sigma - 2\varkappa)! (4a^2 t)^{\sigma}} \right]. \tag{12}$$

Та же формула (12) будет справедлива и для понижения давления в любой точке пласта снаружи (при $r \geqslant R$) галлереи радиуса R, но только в формуле первое слагаемое внутри квадратной скобки изменится и будет равно $\ln \frac{4a^2 t}{r^2}$.

Выведенные здесь формулы, строго говоря, справедливы для условий бесконечного пласта, но в довольно широком диапазоне ими можно пользоваться и в условиях ограниченного пласта с конечным радиусом контура питания [1].

Во всех формулах (11)—(12) под Δp и Δp_c можно подразумевать повышения давления после мгновенного прекращения отбора жидкости из батареи скважин или из галлереи. Кроме того, используя метод суперпозиции, формулы легко обобщить на случай нескольких концентрических батарей (или галлерей) эксплуатационных или нагнетательных скважин.

Поступило
8 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Щелкачев, Упругий режим пластовых водонапорных систем., М., 1948.
[2] В. Н. Щелкачев, Тр. Московск. нефт. ин-та, № 11 (1951).