Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

М. М. ПОСТНИКОВ

О КЛАССИФИКАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 V 1951)

Гомотопическая классификация непрерывных отображений полиэдра в топологическое пространство и определение гомотопического типа данного полиэдра с самого появления гомотопической теории непрерывных отображений как самостоятельной ветви топологии считались основными ее задачами. С развитием аппарата теории возникла третья основная задача — определение групп гомологий пространства по его гомотопическим группам и некоторым дополнительным инвариантам. Несмотря на большое число работ, посвященных рассмотрению этих задач, решение их, однако, было получено лишь в очень частных случаях.

В моей заметке [1] введен новый гомотопический инвариант пространства — его натуральная система и показано, что группы сингулярных гомологий линейно связного топологического пространства определяются (с помощью некоторой конструкции) его натуральной системой. В другой моей заметке [2] доказано, что натуральная система некоторого полиэдра полностью определяет его гомотопический тип. Здесь же будет указано, как, зная натуральную систему линейно связного топологического пространства, определить, гомотопны ли между собой два непрерывных отображения в него произвольного полиэдра. Таким образом, указанные выше три основные задачи теории гомотопии сведены к одной — задаче вычисления натуральной системы линейно связного топологического пространства. Ранее полученные теоремы классификации [4-6] либо являются частными случаями результатов этой заметки, либо легко могут быть из нее выведены.

Для простоты я ограничиваюсь рассмотрением отображений локально-конечных симплициальных полиэдров. Переход к произвольным ячеечным (см. [2]) полиэдрам затруднений не вызывает. В заметке приняты обозначения и терминология статьи [1] и пп. Д и Е заметки [3].

А. Пусть G_1 — мультипликативная группа с единицей 1, а K и L — некоторые (G_1, σ)-комплексы. Функция μ, относящая произвольной клетке A из K клетку μA из L, называется симплициальным отображением комплекса K в комплекс L, если: 1) размерности клеток A и μA совпадают; 2) $\mu A^{(\alpha)} = (\mu A)^{(\alpha)}$ для любой (r, p)-последовательности α (r — размерность A); 3) $\sigma\mu A = \sigma A$. Заметим, что отображение σ является согласно этому определению симплициальным отображением комплекса K в комплекс $K\ (G_1)$ группы G_1.

Пусть G—аддитивная группа, для которой G_1 является группой левых операторов, и пусть l — некоторый $p+1$-мерный ∇_σ-цикл из L над G. С помощью симплициального отображения μ определим в комплексе K $p+1$-мерную цепь $\mu^* l$ над группой G, положив $\mu^* l(A) = l(\mu A)$ для любой $p+1$-клетки A из K. Легко видеть, что цепь $\mu^* l$ является ∇_σ-циклом. Предположим, что в комплексе K существует такая p-мерная цепь d^p над группой G, что

$$\nabla_\sigma d^p + \mu^* l = 0.$$

Любой r-клетке A из K (r произвольно) отнесем (r, p)-функцию $[d^p, A]$ над группой G, положив $[d^p, A](\mathfrak{a}) = d^p(A^{(\mathfrak{a}^{-1})})$ для любой (r, p)-последовательности $\mathfrak{a}$. Оказывается, что пара $(\mu A, [d^p, A])$ является r-клеткой p-расширения L' комплекса L над группой G с фактором l, а отображение ν: $A \to (\mu A, [d^p, A])$ комплекса K в комплекс L' симплициально. Его мы назовем **продолжением** отображения μ **с помощью** d^p.

Б. Симплекс, вершины которого некоторым образом упорядочены, назовем **упорядоченным**. Вершины r-мерного упорядоченного симплекса мы будем нумеровать целыми числами от нуля до r так, чтобы вершина с номером a тогда и только тогда предшествовала вершине с номером b, когда $a < b$. p-мерную грань упорядоченного r-мерного симплекса A, натянутую на вершины, номера которых принадлежат данной (r, p)-последовательности $\mathfrak{a}$, обозначим через $A(\mathfrak{a})$. Через $A^{(\mathfrak{a})}$ обозначим грань $A_{(\mathfrak{a}^{-1})}$.

Пусть P — локально-конечный симплициальный полиэдр, заданный в некоторой триангуляции. Зафиксировав некоторый порядок вершин указанной триангуляции, назовем r-**клеткой** полиэдра P r-мерный симплекс его триангуляции, упорядоченный в соответствии с фиксированным порядком вершин всей триангуляции.

Пусть a^1 — одномерный цикл полиэдра P (точнее, его фиксированной триангуляции) над некоторой мультипликативной группой G_1.

Совокупность всех клеток полиэдра P мы с помощью a^1 обратим в (G_1, σ)-комплекс $P(a^1)$, положив

$$\sigma_{a,b}(A) = \begin{cases} a^1(A_{(a,b)}), & \text{если } a < b; \\ 1, & \text{если } a = b \quad (a, b = 0, \ldots, r) \\ [a^1(A_{(b,a)})]^{-1}, & \text{если } a > b \end{cases}$$

для любой r-клетки A полиэдра P. Очевидно, что операции ∇_σ и ∇_{a_1} совпадают. Так построенное отображение σ мы будем обозначать также через μ_{a^1}.

В. Пусть $\mathfrak{G} = \{G_r, k_r\}$ — некоторая система; пусть для любого $r \geqslant 1$ в полиэдре P задана r-мерная цепь c^r над группой G_r и пусть

$В_1$. Цепь c^1 является циклом.

Тогда определено (см. Б) симплициальное отображение μ_{c^1} комплекса $P(c^1)$ в комплекс $K(G_1) = K_1(\mathfrak{G})$. Предположим, что для некоторого $r \geqslant 1$ уже определено симплициальное отображение μ_{c^r} комплекса $P(c^1)$ в комплекс $K_r(\mathfrak{G})$ и

$В_{r+1}$. $\nabla_{c^1} c^{r+1} + \mu^*_{c^r} k_r = 0$.

Тогда, согласно А, определено продолжение $\mu_{c^{r+1}}$ отображения μ_{c^r} с помощью c^{r+1}, являющееся симплициальным отображением комплекса $P(c^1)$ в комплекс $K_{r+1}(\mathfrak{G})$. Если условия $В_r$ выполнены для всех $r \geqslant 1$, то последовательность $\mathbf{c}$ цепей $c^1, c^2, \ldots, c^r, \ldots$ назовем **циклоидом** полиэдра P над системой $\mathfrak{G}$.

Г. Пусть $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — два циклоида полиэдра P над системой $\mathfrak{G}$ и пусть для любого $r \geqslant 0$ в полиэдре P задана цепь e^r над группой G_{r+1}.

Предположим, что

Γ_1. $d^1 : c_1 = \nabla e^0$ *.

Пусть $r \geqslant 0$ и $0 \leqslant j \leqslant r$. Любой r-клетке A полиэдра P отнесем $r+1$-клетку $\theta_j^{(1)} A = (\alpha_{a,b})$ комплекса $K_1(\mathfrak{G})$, положив $\alpha_{a,b} = \alpha_a^{-1}\alpha_b$, где

$$\alpha_a = \begin{cases} c^1(A_{(0,a)}), & \text{если } a \leqslant j \text{ **;} \\ c^1(A_{(0,j)})\, e^0(A_{(j)}), & \text{если } a = j+1; \\ e^0(A_{(0)})\, d^1(A_{(0,a-1)}), & \text{если } a > j+1. \end{cases}$$

Предположим, что для некоторого $p \geqslant 1$ уже построено отображение $\theta_j^{(p)}$, относящее любой r-клетке A полиэдра P $r+1$-клетку $\theta_j^{(p)} A$ комплекса $K_p(\mathfrak{G})$, и определим $p+1$-мерную цепь $(c \times d, e)^{p+1}$ полиэдра P над группой G_{p+1}, положив

$$(c \times d, e)^{p+1}(A) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j k(\theta_j^{(p)} A)$$

для любой $p+1$-клетки A полиэдра P.

Пусть $\mathfrak{a} = (a_0, \ldots, a_{p+1})$ — произвольная $(r+1, p+1)$-последовательность. Построим $(r, p+1)^*$-последовательность $\mathfrak{b} = (b_0, \ldots, b_{p+1})$, положив

$$b_a = \begin{cases} a_a, & \text{если } a_a \leqslant j \\ a_a - 1, & \text{если } a_a > j \end{cases} \quad (a = 0, \ldots, p+1).$$

Заметим, что если $a_{s-1} \leqslant j < a_s$ (условно полагаем $a_{-1} = -1$, $a_{p+2} = r+2$), то последовательность $\mathfrak{b}$ тогда и только тогда является $(r, p+1)$-последовательностью, когда $a_s > a_{s-1}+1$, а последовательность $\mathfrak{b}^{(s-1)}$ всегда является (r, p)-последовательностью. Определим теперь для любой r-клетки A полиэдра P $(r+1, p+1)$-функцию $[p, j, A]$ над группой G_{p+1}, положив

$$[p, j, A](\mathfrak{a}) = \begin{cases} d^{p+1}(A_{(\mathfrak{b})}), & \text{если } s = 0; \\ e^p(A_{(\mathfrak{b}^{(0)})}), & \text{если } s = 1 \text{ и } a_1 = a_0 + 1; \\ c^1(A_{(b_0, b_1)})\, e^p(A_{(\mathfrak{b}^{(0)})}) + c^{p+1}(A_{(\mathfrak{b})}) - \sum\limits_{a=1}^{p+1} (-1)^a k_p(\theta_a^{(p)} A_{(\mathfrak{b})}), & \\ & \text{если } s = 1 \text{ и } a_1 > a_0 + 1; \\ 0, & \text{если } 1 < s < p+2 \text{ и } a_s = a_{s-1} + 1; \\ c^{p+1}(A_{(\mathfrak{b})}) - \sum\limits_{a=s}^{p+1} (-1)^a k_p(\theta_a^{(p)})\, A_{(\mathfrak{b})}), & \\ & \text{если } 1 < s < p+2 \text{ и } a_s > a_{s-1} + 1; \\ c^{p+1}(A_{(\mathfrak{b})}), & \text{если } s = p+2. \end{cases}$$

Оказывается, что если

Γ_{p+1}. $e^0 d^{p+1} - c^{p+1} + (c \times d, e)^{p+1} = \nabla_{c^1} e^p$,

то пара $\theta_j^{(p+1)} A = (\theta_j^{(p)} A, [p, j, A])$ является $r+1$-клеткой комплекса $K_{p+1}(\mathfrak{G})$. Если условия Γ_r выполнены для всех $r \geqslant 1$, то циклоиды **c** и **d** назовем *гомологичными* между собой.

---

* Здесь соотношение $d^1 : c^1 = \nabla e^0$ обозначает то, что в ([3]) обозначалсь соотношением $c^1 : d^1 = \nabla e^0$.

** Условно полагаем $c^1(A_{(0, 0)}) = 1$.

Д. Пусть X — линейно связное топологическое пространство и $\mathfrak{X}$ — его натуральная система. Непрерывное отображение полиэдра P в пространство X назовем нормальным, если на любой r-клетке полиэдра оно определяет нормальный сингулярный симплекс пространства X в смысле (1).

Пусть f — нормальное отображение полиэдра P в пространство X и A — произвольная r-клетка $(r \geqslant 1)$ полиэдра P. Обозначим через $d_f^r(A)$ элемент группы $\pi_*^r(X)$, оценивающий отличие нормального сингулярного симплекса пространства X, определенного отображением f клетки A, от соответствующего стандартного. Оказывается, что так построенная последовательность d_f цепей $d_f^1, d_f^2, \ldots$ является циклоидом полиэдра P над системой $\mathfrak{X}$. Его мы назовем характеристическим циклоидом нормального отображения f.

Теорема 1. *Любой циклоид полиэдра P над системой $\mathfrak{X}$ является характеристическим циклоидом некоторого нормального отображения полиэдра в пространство X.*

Теорема 2. *Нормальные отображения тогда и только тогда гомотопны друг другу, когда их характеристические циклоиды гомологичны между собой.*

Так как, очевидно, любое непрерывное отображение полиэдра в пространство X гомотопно нормальному, то эти теоремы полностью решают задачу классификации непрерывных отображений. В случае, когда $\pi_*^r(X) = 0$ для $1 < r < n$ и $\dim P = n$, теорема 2 переходит в теорему заметки (6). Если же $\pi^1(X) = 1$ и $\pi_*^r(X) = 0$ для $1 < r < n$, а $\dim P = n + 1$, то теорема 2 дает новое решение задачи, уже решенной в (4) и (5). Оказывается, что в этом случае для фактора k_n можно дать явное выражение, с помощью которого простыми вычислениями из теоремы 2 выводятся результаты заметок (4) и (5).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Постников, ДАН, **76**, № 3 (1951). [2] М. М. Постников, ДАН, **76**, № 6 (1951). [3] М. М. Постников, ДАН, **66**, № 2 (1949). [4] М. М. Постников, ДАН, **66**, № 4 (1949). [5] М. М. Постников, ДАН, **71**, № 6 (1950). [6] М. М. Постников, ДАН, **67**, № 3 (1949).