Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Е. М. ЛАНДИС

О МНОЖЕСТВЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 II 1951)

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция n переменных, заданная в n-мерной области G. Мы будем говорить, что функция k раз дифференцируема, если она обладает на G k последовательными полными дифференциалами. Особой точкой дифференцируемой функции F мы будем называть точку $(x_1, \ldots, x_n) \in G$, в которой $\operatorname{grad} F(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Пусть $E \subset G$ — некоторое множество. Через $F[E]$ мы обозначим совокупность значений, принимаемых функцией F на множестве E. Мы скажем далее, что некоторое свойство A имеет место почти всюду по оси значений функции F, если оно выполнено для точек множества $H \subset E$ такого, что $\operatorname{mes} F[E \setminus H] = 0$. Точки множества H называются в этом случае типичными для свойства A.

В этой заметке изучаются свойства множества особых точек дифференцируемой функции n переменных, которое мы будем обозначать через Ω, имеющие место почти всюду по оси значений функции.

Пусть $M \subset G$ — некоторое множество. Скажем, что луч l касается множества M в точке a, если a есть начало луча l и существует последовательность точек $\{a_n\}$, $a_n \in M$, стремящаяся к a такая, что $\frac{\rho(a_n, l)}{\rho(a_n, a)} \to 0$ при $a_n \to a$ (через $\rho(\xi, \eta)$ обозначено расстояние между ξ и η). Теоретико-множественная сумма лучей, касающихся множества M в точке $a \in M$, называется контингенцией множества M в точке a.

Мы докажем ниже, что если функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ k раз дифференцируема, то типичная особая точка будет такой, что контингенция множества особых точек в ней не лежит ни в какой k-мерной гиперплоскости (частным случаем этого утверждения является доказанная А. Кронродом и Е. Ландисом теорема о том, что множество особых точек n раз дифференцируемой функции n переменных имеет нулевую меру по оси значений функции ([1])).

Определение 1. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, заданная на множестве $E \subset G$. Мы скажем, что функция F слабо дифференцируема в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in E$ до порядка k, если существует полином $P^k_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_n)$ степени не выше k такой, что

$$F(x_1, \ldots, x_n) - F(x_1^0, \ldots, x_n^0) - P^k_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_n) = o\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2\right)^{k/2}\right].$$

Полином $P^k_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_n)$ называется в этом случае слабым дифференциалом порядка k функции F в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Определение 2. Скажем, что функция $F(x_1, \ldots, x_n)$, заданная на множестве $E \subset G$, сильно дифференцируема на множестве E до порядка k, если в каждой точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in E$ существует слабый дифференциал не выше, чем k-го порядка, $P^k_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_n)$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что:

1°. Если точки $(x_1', \ldots, x_n')$ и $(x_1'', \ldots, x_n'')$ принадлежат E и $\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i'' - x_i')^2\right]^{1/2} < \delta$, то

$$\left|F(x_1'', \ldots, x_n'') - F(x_1', \ldots, x_n') - P^k_{x_1', \ldots, x_n'}(x_1'', \ldots, x_n'')\right| < \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i'' - x_i')^2\right]^{k/2}.$$

2°. Рассмотрим какую-либо частную производную $\dfrac{\partial^s P^k_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ дифференциала $P^k_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_n)$ k-го порядка функции F в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in E$ как функцию переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда эта функция обладает в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ слабым дифференциалом $D^{k-s}_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_n)$ порядка $k - s$ таким, что

$$\left|\frac{\partial^s P^k_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^s P^k_{x_1, \ldots, x_n}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} - D^{k-s}_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_n)\right| <$$

$$< \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2\right]^{\frac{k-s}{2}}$$

при $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ и $\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2\right]^{1/2} < \delta$.

Замечание. По теореме Уитнея ([2]), если функция F сильно дифференцируема до порядка k на множестве $E \subset R_n$ и множество E замкнуто, то функция F может быть распространена на все R_n так, что она будет всюду k раз дифференцируема, причем дифференциалы в точках из E сохранятся.

Лемма 1. *Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — m раз дифференцируемая функция, заданная в G. Пусть в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ первые k последовательных слабых дифференциалов функции F существуют и равны нулю. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — $m - k$ раз дифференцируемая в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (в слабом смысле) функция и $x_n^0 = \Phi(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$. Тогда функция $n - 1$ переменного $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \Phi(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ слабо дифференцируема до порядка m.*

Лемма 2. *Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — B-функция, заданная в G. Пусть E есть B-множество, в каждой точке которого функция F слабо дифференцируема по G до порядка m. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $H \subset E$ такое, что функция F сильно дифференцируема на множестве H до порядка m и* $\operatorname{mes} F[E \setminus H] < \varepsilon$.

Лемма 1 в точности совпадает с леммой 1 заметки ([1]). Лемма 2 представляет некоторое усиление леммы 4 той же заметки.

Лемма 3. *Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, заданная на множестве $E \subset G$. Пусть в каждой точке из E функция F слабо диффе-*

ренцируема по множеству E до порядка n и во всех точках E слабые дифференциалы n-го порядка тождественно равны нулю. Тогда $\operatorname{mes} F[E] = 0$.

Доказательство легко следует из теоремы Витали.

Лемма 4. *Пусть множество $E \subset G$ таково, что контингенция множества E в каждой его точке содержится в некоторой (зависящей от точки) k-мерной гиперплоскости. Пусть на E задана функция F, слабо дифференцируемая до порядка k в точках E, причем в точках из E слабый дифференциал k-го порядка есть тождественный нуль. Тогда* $\operatorname{mes} F[E] = 0$.

Доказательство. Допустим, что $\overline{\operatorname{mes}}\, F[E] > 0$. Существует такая k-мерная гиперплоскость Γ^* и такое множество $E^* \subset E$, что при ортогональной проекции множества E^* на Γ^* расстояния между парами точек сокращаются не более, чем в два раза, и $\operatorname{mes} E^* > 0$. Обозначим через E^{**} проекцию E^* на Γ^* и определим на E^{**} функцию Φ, положив ее в каждой точке равной значениям F в проектируемой в нее точке. Рассматривая эту функцию как функцию k переменных (относительно координат в гиперплоскости Γ^*), мы видим, что она имеет в каждой точке слабый дифференциал k-го порядка, тождественно равный нулю. Применяя лемму 3, мы приходим к противоречию.

Лемма 5 (о неявной функции). *Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция n переменных, заданная на G. Пусть в каждой точке B-множества E существует слабый дифференциал m-го порядка по G $(m \geqslant 1)$ и дифференциал 1-го порядка не равен нулю. Пусть* $\operatorname{mes} F[E] > 0$. *Тогда существует функция $\Phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ (для некоторого i) и B-множество H такие, что*:

1°. *Для каждой точки* $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in H \quad x_i^0 = \Phi(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$.

2°. *В точке $(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$ функция Φ слабо дифференцируема до m-го порядка по $n-1$-мерному пространству.*

3°. $\operatorname{mes} F[H] > 0$.

Доказательство. Пусть $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in E$. Рассмотрим множества уровня $F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и $P^m_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_n) = P^m_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Первое обозначим через $E_{F(x_1^0, \ldots, x_n^0)}$, а второе — через $E_{P(x_1^0, \ldots, x_n^0)}$. Для точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ можно найти такие натуральные i_0 и $\delta_0 > 0$, что:

1) в δ_0-окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ множество $E_{P(x_1^0, \ldots, x_n^0)}$ можно представить как график полинома $Q^m_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ степени не выше m от $n-1$ переменной.

2) в δ_0-окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ не существует точек $(x_1, \ldots, x_n) \in E_{F(x_1^0, \ldots, x_n^0)}$, отличных от $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и лежащих с ней на одной прямой, параллельной оси x_{i_0}.

Найдутся i и $\delta > 0$ такие, что множество E^* точек $(x_1^0, \ldots x_n^0) \in E$, для которых $i_0 = i$ и $\delta_0 > \delta$, имеет положительную меру по оси значений функции F. Заметим, что E^* есть B-множество.

Найдется точка $(x_1', \ldots, x_n') \in E^*$ такая, что пересечение H множества E^* с δ-окрестностью U_δ точки $(x_1', \ldots, x_n)$ имеет положительную меру по оси значений F.

Обозначим через $\widetilde{G}$ проекцию пересечения $E_{F(x_1', \ldots, x_n')}$ с U_δ на координатную гиперплоскость $x_i = 0$. Определим на гиперплоскости $x_i = 0$ функцию $\Phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, положив ее в каждой точке

$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \widetilde{G}$ равной минимальному значению x_i такому, что $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in U_\delta \cdot E_{F(x_1', \ldots, x_n')}$, и равной нулю вне $\widetilde{G}$.

Функция Φ и множество H удовлетворяют пунктам 1°, 2°, 3° леммы (полиномы $Q^m_{x_1^0, \ldots, x_n^0}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ являются для нее слабыми дифференциалами).

Замечание. Если контингенция H в некоторой точке лежит в k-мерной гиперплоскости, то это же выполнено и для проекции H на гиперплоскость $x_i = 0$.

Теорема. *Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция n переменных, дифференцируемая m раз, заданная на G. Пусть Ω — множество особых точек функции F. Тогда всякое B-множество $N \subset \Omega$, состоящее из точек, в которых контингенция N лежит в некоторой m-мерной гиперплоскости, имеет меру нуль по оси значений F.*

Доказательство. Для $n = 1$ теорема очевидна. Допустим, что для $n < s$ теорема справедлива. Докажем справедливость ее для $n = s$. Допустим, что это не так: существуют m раз дифференцируемая функция s переменных F и B-множество $N \subset \Omega$ (Ω — множество особых точек F) такое, что контингенция N в каждой его точке лежит в некоторой m-мерной гиперплоскости и $\operatorname{mes} F[N] > 0$.

По лемме 4, для почти всех по оси значений F точек из N существует отличная от нуля частная производная порядка $\leqslant m$. С другой стороны, в каждой такой точке все первые производные равны нулю. Следовательно, найдется такая частная производная $\partial^k F / \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_s^{\alpha_s} \equiv V(x_1, \ldots, x_s)$, $k \leqslant m - 1$, и B-множество N^* положительной меры по оси значений F, что на множестве N^* k последовательных дифференциалов функции F равны нулю и $\partial V / \partial x_i \neq 0$ (для некоторого фиксированного i). Для простоты записи будем считать, что $i = s$.

Применяя к функции V лемму 5, мы находим функцию $\Phi(x_1, \ldots, x_{s-1})$, слабо дифференцируемую $m - k$ раз по $n - 1$-мерному пространству, такую, что для точек из N^* $x_s = \Phi(x_1, \ldots, x_{s-1})$.

По лемме 1 мы видим, что функция $\chi(x_1, \ldots, x_{s-1}) \equiv F(x_1, \ldots, x_{s-1}, \Phi(x_1, \ldots, x_{s-1}))$ слабо дифференцируема до порядка m на множестве π^*, являющемся проекцией N^* на гиперплоскость $x_s = 0$, $\operatorname{mes} \chi[N^*] > 0$, и первые слабые дифференциалы χ на N^* равны нулю.

Отсюда, по лемме 2, существует функция $F^*(x_1, \ldots, x_{s-1})$, m раз дифференцируемая, и B-множество N^{**}, состоящее из особых точек F^*, такое, что в каждой его точке контингенция N^{**} лежит в m-мерной гиперплоскости и $\operatorname{mes} F^*[N^{**}] > 0$, что противоречит индуктивному предположению.

Для каждых n и $m < n$ можно построить функцию F n переменных, дифференцируемую m раз, содержащую на каждом уровне особую точку и такую, что контингенция множества особых точек в каждой точке этого множества укладывается в $m + 1$-мерную гиперплоскость.

Поступило
18 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Кронрод и Е. М. Ландис, ДАН, 58, № 7 (1947). [2] H. Whitney, Trans. Am. Math. Soc., 36, No. 1 (1934).