Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

М. К. КЕРИМОВ

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМУМА В РАЗРЫВНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 9 VI 1951)

Пусть заданные плоские кривые

$$L_1: \begin{matrix} x_1 = x_1(\alpha), \\ y_1 = y_1(\alpha); \end{matrix} \quad L_0: \begin{matrix} x_0 = x_0(\beta), \\ y_0 = y_0(\beta); \end{matrix} \quad L_2: \begin{matrix} x_2 = x_2(\gamma), \\ y_2 = y_2(\gamma) \end{matrix} \tag{1}$$

разделяют плоскость xy на четыре бесконечные области: D_0, $\overline{D}_1$, $\overset{+}{D}_1$, D_2. Допустим, что L_1, L_0, L_2 не имеют точек самопересечения, особых точек и точек пересечения между собой; пусть функции $x_1(\alpha)$, $y_1(\alpha)$, $x_0(\beta)$, $y_0(\beta)$, $x_2(\gamma)$, $y_2(\gamma)$ непрерывны вместе с производными до третьего порядка включительно всюду, где они определены. Точки области $\overline{D}_1$ обозначим через $(x, \overline{y})$, а области $\overset{+}{D}_1$ — через $(x, \overset{+}{y})$. Через $R = \begin{cases} \overline{R} \\ \overset{+}{R} \end{cases}$ обозначим открытую область точек (x, y, y'), причем $\overline{R}$ состоит из $(x, \overline{y}, \overline{y}')$, а $\overset{+}{R}$ — из $(x, \overset{+}{y}, \overset{+}{y}')$ и $\overline{y}' \neq 0$, $\overset{+}{y}' \neq 0$.

Пусть функция $F(x, y, y')$ равномерно непрерывна с частными производными до четвертого порядка включительно по всем переменным в любой конечной области, содержащейся в $\overline{R}$ или $\overset{+}{R}$, т. е. пусть F непрерывна с производными во всех точках (x, y, y'), исключая те, которые соответствуют кривой L_0; в этих точках F имеет разрыв 1-го рода по всем переменным. Пусть

$$F(x, y, y') = \begin{cases} \overline{F}(x, \overline{y}, \overline{y}') & \text{в } \overline{R}, \\ \overset{+}{F}(x, \overset{+}{y}, \overset{+}{y}') & \text{в } \overset{+}{R}. \end{cases}$$

За допустимые кривые приняты обычные кривые, однократно пересекающие линии L_1, L_0, L_2, причем на L_0 все они имеют точки перелома.

Ф о р м у л и р о в к а з а д а ч и. В классе всех допустимых кривых найти ту, которая реализует экстремум (например, минимум) функционала

$$J = \int\limits_{x_1(\alpha)}^{x_2(\gamma)} F(x, y, y')\,dx = \int\limits_{x_1(\alpha)}^{x_0(\beta)} \overline{F}(x, \overline{y}, \overline{y}')\,dx + \int\limits_{x_0(\beta)}^{x_2(\gamma)} \overset{+}{F}(x, \overset{+}{y}, \overset{+}{y}')\,dx. \tag{2}$$

Сформулированную задачу мы называем первичной разрывной задачей.

Кривую, реализующую минимум функционала (2), для краткости назовем минимум-кривой.

Простейшие необходимые и достаточные условия минимума для рассматриваемого типа задач, но с фиксированными концами, условием регулярности и с одной линией разрыва приведены в ([1–3]). В работе ([3]) доказано и условие Якоби, но при сильных ограничениях (геометрическим методом). В работах ([3, 4]) отмечалось, что аналитический метод доказательства условия Якоби (теория второй вариации) остается неисследованным. Настоящая работа посвящена теории второй вариации для разрывных задач рассматриваемого типа в наиболее общей их постановке (с подвижными концами, без условия регулярности и с линией разрыва).

Для простоты мы рассматриваем плоский случай в непараметрическом виде.

С помощью небольших изменений рассуждений из работ ([1–3, 5]) можно доказать, что если кривая $E_{102} = \begin{cases} \bar{E}_{10} \\ \overset{+}{E}_{02} \end{cases}$ с уравнением $y = \begin{cases} \bar{y}(x) & x_1 \leqslant x \leqslant x_0 \\ \overset{+}{y}(x) & x_0 \leqslant x \leqslant x_2 \end{cases}$ реализует минимум функционала J, то дуги $\bar{E}_{10}$ и $\overset{+}{E}_{02}$ должны удовлетворять уравнениям Эйлера в интегральной форме (I), условиям трансверсальности в точках 1 и 2 (I′), первичному условию разрыва в точке 0 (I″):

$$[(\bar{F} - \bar{y}_x \bar{F}_{\bar{y}'}) - (\overset{+}{F} + \overset{+}{y}_x \overset{+}{F}_{\overset{+}{y}'})]\, dx_0 + [\bar{F}_{\bar{y}'} - \overset{+}{F}_{\overset{+}{y}'}]\, dy_0 = 0, \tag{3}$$

а также условиям Вейерштрассе (II) и Лежандра (III).

Если вдоль гладких дуг $\bar{E}_{10}$ и $\overset{+}{E}_{02}$, удовлетворяющих условию (I), выполнены, соответственно, неравенства $\bar{F}_{\bar{y}'\bar{y}'} \neq 0$ и $\overset{+}{F}_{\overset{+}{y}'\overset{+}{y}'} \neq 0$, а в точке 0 выполнено условие (I″), то E_{102} назовем ломаной экстремалью. Строя однопараметрическое семейство ломаных экстремалей, содержащее E_{102}, и давая с его помощью определение фокальных точек кривых L_1 и L_2 на E_{102}, можно доказать (посредством теоремы об огибающей) условие о фокальных точках (IV), или условие Якоби: в случае минимума на E_{102} между точками 1 и 2 не могут существовать фокальные точки кривых L_1 и L_2.

Далее мы строим однопараметрическое семейство допустимых кривых

$$y = y(x, a), \quad x_1(\alpha) \leqslant x \leqslant x_2(\gamma), \tag{4}$$

содержащее E_{102} при $a = 0$. Обобщая метод Морса ([6]) вычисления второй вариации на случай разрывной задачи, после некоторых выкладок придем к равенству

$$J''(0) = J_2(\eta, \tau) = b_1\tau_1^2 + (\bar{b}_0 + \overset{+}{b}_0)\tau_0^2 + b_2\tau_2^2 + \\ + \int_{x_1}^{x_0} 2\bar{\omega}(x, \bar{\eta}, \bar{\eta}')\, dx + \int_{x_0}^{x_2} 2\overset{+}{\omega}(x, \overset{+}{\eta}, \overset{+}{\eta}')\, dx \tag{5}$$

с условиями на концах:

$$\bar{\eta}(x_1) = C_1\tau_1, \quad \bar{\eta}(x_0) = \bar{C}_0\tau_0, \quad \overset{+}{\eta}(x_0) = \overset{+}{C}_0\tau_0, \quad \overset{+}{\eta}(x_2) = C_2\tau_2, \tag{A}$$

где $\bar{\eta}(x) = \bar{y}_a(x, 0)$, $\overset{+}{\eta}(x) = \overset{+}{y}_a(x, 0)$; $\tau_1 = \alpha'(0)$, $\tau_0 = \beta'(0)$, $\tau_2 = \gamma'(0)$; C_1, $\bar{C}_0$, $\overset{+}{C}_0$, C_2 — выражения, связывающие направления касательных к E_{102} и L_1, L_0, L_2 в точках 1, 0, 2, а b_1, $\bar{b}_0$, $\overset{+}{b}_0$, b_2 — сложные выражения, зависящие от значений функций $\bar{F}$, $\overset{+}{F}$ и их производных при $x = x_1$, $x = x_0$, $x = x_2$ и $2\omega(x, \eta, \eta') = F_{y'y'}\eta'^2 + 2F_{y'y}\eta\eta' + F_{yy}\eta^2$.

Выражение (5) мы называем второй вариацией функционала J вдоль кривой E_{102}.

Совокупность, состоящую из разрывной функции

$$\eta(x) = \begin{cases} \bar{\eta}(x), & x_1 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \overset{+}{\eta}(x), & x_0 \leqslant x \leqslant x_2, \end{cases}$$

с $\bar{\eta}(x)$ и $\overset{+}{\eta}(x)$ из класса D^1 (в смысле ([1])) и постоянных τ_1, τ_0, τ_2 назовем допустимой совокупностью вариаций семейства (4) вдоль E_{102}. Справедливо следующее утверждение.

Условие Якоби в терминах знака второй вариации (IV). *Для того чтобы допустимая кривая E_{102} реализовала минимум функционала J, необходимо, чтобы она удовлетворяла условиям* (I), (I′), (I″), *а также вторая вариация $J_2(\eta, \tau)$ вдоль E_{102} была неотрицательна для любой допустимой совокупности вариаций, удовлетворяющих условиям* (A).

Доказательство легко получается из леммы.

Лемма. *Для любой заданной допустимой совокупности вариаций $\eta(x)$, τ_1, τ_0, τ_2 вдоль E_{102}, удовлетворяющих условиям* (A), *существует семейство допустимых кривых* (4) *такое, что заданная совокупность вариаций $\eta(x)$, τ_1, τ_0, τ_2 соответствует этому семейству вдоль кривой E_{102}.*

Условие Якоби можно сформулировать и в другой форме. Для этого рассмотрим новую разрывную вариационную задачу, называемую нами вторичной, для функционала $J_2(\eta, \tau)$.

Формулировка вторичной разрывной задачи. Среди всех допустимых совокупностей $\eta(x)$, τ_1, τ_0, τ_2, удовлетворяющих условиям (A), найти ту, которая реализует минимум функционала $J_2(\eta, \tau)$.

Как и для первичной задачи, получим уравнения Эйлера (Якоби):

$$\frac{d}{dx}\omega_{\eta'} - \omega_\eta = \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\bar{\omega}_{\bar{\eta}'} - \bar{\omega}_{\bar{\eta}} = 0, & (6) \\ \dfrac{d}{dx}\overset{+}{\omega}_{\overset{+}{\eta}'} - \overset{+}{\omega}_{\overset{+}{\eta}} = 0, & (7) \end{cases}$$

условия трансверсальности:

$$C_1\bar{\omega}_{\bar{\eta}'}(x_1) = b_1\tau_1, \quad C_2\overset{+}{\omega}_{\overset{+}{\eta}'}(x_2) = -b_2\tau_2 \tag{8}$$

и вторичное условие разрыва:

$$\bar{C}_0\bar{\omega}_{\bar{\eta}'}(x_0) - \overset{+}{C}_0\overset{+}{\omega}_{\overset{+}{\eta}'}(x_0) = -(\bar{b}_0 + \overset{+}{b}_0)\tau_0. \tag{9}$$

Уравнение $\frac{d}{dx}\omega_{\eta'} - \omega_\eta = 0$ мы называем склеенным, а его решение $\eta(x)$, удовлетворяющее условию из (A) при $x = x_0$ и условию (9), разрывным решением или разрывной экстремалью.

Так как $\bar{C}_0 \neq \overset{+}{C}_0$, то допустимые функции $\eta(x)$ для вторичной задачи имеют разрыв 1-го рода при $x = x_0$, подчиненный условию из (A). Заметим, что вторичная задача отлична от разрывных задач, исследованных советским математиком А. М. Размадзе ([7]). Нетрудно доказать, что линейно независимые решения уравнения (6) единственно определяют такие же решения уравнения (7). Давая новое определение сопряженных точек с помощью разрывного решения склеенного уравнения Эйлера и заменяя функционал $J_2(\eta, \tau)$ некоторой квадратичной формой, мы даем другое доказательство условия Якоби в терминах знака второй вариации, аналогичное доказательству, проведенному в ([5]) для обычной задачи.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Основы вариационного исчисления, 1, ч. II, М.—Л., 1935. [2] Н. М. Гюнтер, Курс вариационного исчисления, М.—Л., 1941. [3] M. Mason and G. Bliss, Trans. Am. Math. Soc., 7, 325 (1906). [4] L. Graves, Bull. Am. Math. Soc., 36, 831 (1930). [5] Г. Блисс, Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950. [6] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, N.Y., 1934. [7] А. М. Размадзе, Math. Ann., 94, 1 (1925).