Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

П. Т. БУГАЕЦ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ОСТАТКА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ФУРЬЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 V 1951)

В этой статье мы обобщаем на двумерный случай результат С. М. Никольского (1), в котором дается асимптотическое выражение для верхней грани уклонений функций $f(x)$ периода 2π, удовлетворяющих условию

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant \omega(|h|),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль колебания $f(x)$, от их сумм Фурье. Именно, мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть H_{ω_1,ω_2} обозначает класс функций $f(x,y)$ периода 2π относительно каждой из переменных x и y, удовлетворяющих условию*

$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)| \leqslant \omega_1(|x_2-x_1|)+\omega_2(|y_2-y_1|). \tag{1}$$

Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_{mn} = \frac{2\theta_{mn}(2m+1)(2n+1)\ln m \ln n}{\pi^4} \int\limits_0^{{}^1/_2 h^{(m)}} \int\limits_0^{{}^1/_2 h^{(n)}} \min\{\omega_1(2u), \omega_2(2v)\} \times$$
$$\times \sin\frac{2m+1}{2} u \sin\frac{2n+1}{2} u\, du\, dv + \rho_{mn}, \tag{2}$$

где $\rho_{mn} = O\{(\ln m + \ln n)(\omega_1(h^{(m)}) + \omega_2(h^{(n)}))\}$, $h^{(m)} = \frac{2\pi}{2m+1}$, $\theta_{mn} = 1$, *если ω_1 и ω_2 — выпуклые функции, а в общем случае* ${}^1/_2 \leqslant \theta_{mn} \leqslant 1$.

Доказательство. Верхняя грань $\mathcal{E}_{mn}$ не зависит от x и y, и поэтому будем считать $x=y=0$. Кроме того, она не изменится, если ее распространить на более узкий класс $H^0_{\omega_1,\omega_2}$ функций f, принадлежащих к H_{ω_1,ω_2} и удовлетворяющих условию $f(0,0)=0$. Поэтому, обозначая через $S_{mn}(f;x,y)$ сумму Фурье порядка (mn) функций f и принимая во внимание четность ядра Дирихле

$$D_m(u) = \frac{\sin(m+{}^1/_2)u}{2\sin{}^1/_2 u},$$

будем иметь

$$\mathcal{E}_{mn} = \sup_{f\in H_{\omega_1,\omega_2}} |S_{mn}(f;x,y)-f(x,y)| = \sup_{f\in H^0_{\omega_1,\omega_2}} |S_{mn}(f;0,0)| =$$
$$= \sup_{f\in H^0_{\omega_1,\omega_2}} \left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f D_m D_n\, dt\, dz\right| = \sup_{f\in H} \left|\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} f D_m D_n\, dt\, dz\right|,$$

где H обозначает класс функций f, определенных на квадрате $0 \leqslant t, z \leqslant \pi$, удовлетворяющих на нем условию (1) и таких, что $f(0,0)=0$.

Положим для $\mu = {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots, m,\ i = 1, 2, \ldots, m$

$$t_\mu^{(m)} = \mu h^{(m)}, \quad d_\mu^{(m)} = \left| \int_{t_\mu^{(m)}}^{t_{\mu+1/2}^{(m)}} D_m dt \right|, \quad \Delta_i^{(m)} = \int_{t_{i-1/2}^{(m)}}^{t_{i+1/2}^{(m)}} D_m\, dt,$$

$$\gamma_i^{(m)} = \sum_{p=i}^{m} \Delta_p^{(m)}. \tag{3}$$

Имеют место соотношения (см. [1])

$$C > d_\mu^{(m)} > d_{\mu+1/2}^{(m)}, \quad |\Delta_i^{(m)}| > |\Delta_{i+1}^{(m)}|, \quad |\gamma_i^{(m)}| < |\Delta_i^{(m)}| = d_{i-1/2}^{(m)} - d_i^{(m)}, \tag{4}$$

где C — положительная постоянная.

Положим еще для $i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$

$$F_{ij} = F_{ij}(t,z) = f(t,z) - f(t_i^{(m)}, t_j^{(n)}), \quad t_{i-1/2}^{(m)} \leqslant t \leqslant t_{i+1/2}^{(m)}, \quad t_{j-1/2}^{(n)} \leqslant z \leqslant t_{j+1/2}^{(n)}.$$

Тогда равномерно относительно $f \in H$ справедливо

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f D_m D_n\, dt\, dz = \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{i-1/2}^{(m)}}^{t_{i+1/2}^{(m)}} \int_{t_{j-1/2}^{(n)}}^{t_{j+1/2}^{(n)}} F_{ij} D_m D_n\, dt\, dz +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{t_{1/2}^{(m)}} \int_0^\pi f D_m D_n\, dt\, dz + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{t_{1/2}^{(n)}} f D_m D_n\, dt\, dz -$$

$$- \frac{4}{\pi^2} \int_0^{t_{1/2}^{(m)}} \int_0^{t_{1/2}^{(n)}} f D_m D_n\, dt\, dz + \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(t_i^{(m)}, t_j^{(n)})\, \Delta_i^{(m)} \Delta_j^{(n)}. \tag{5}$$

В силу (1) и результата С. М. Никольского

$$\left| \frac{4}{\pi^2} \int_0^{t_{1/2}^{(m)}} \int_0^\pi f D_m D_n\, dt\, dz \right| \leqslant O\{\ln n\, [\omega_1(h^{(m)}) + \omega_2(h^{(n)})]\}.$$

Аналогичная оценка имеет место для третьего слагаемого правой части (5).

Далее, нетрудно проверить, что

$$\left| \frac{4}{\pi^2} \int_0^{t_{1/2}^{(m)}} \int_0^{t_{1/2}^{(n)}} f D_m D_n\, dt\, dz \right| \leqslant O(\omega_1(h^{(m)})) + O(\omega_2(h^{(n)})).$$

Применяя преобразование Абеля к последнему слагаемому правой части (5) и принимая во внимание (1), (3) и (4), получим:

$$\left| \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(t_i^{(m)}, t_j^{(n)})\, \Delta_i^{(m)} \Delta_j^{(n)} \right| \leqslant O(\omega_1(h^{(m)})) + O(\omega_2(h^{(n)})).$$

Из изложенного следует, что последние четыре слагаемых правой части (5) порядка ρ_{mn}; следовательно, (5) можно переписать так:

$$\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi f D_m D_n\,dt\,dz = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \int\limits_{t_{i-1/2}^{(m)}}^{t_{i+1/2}^{(m)}}\int\limits_{t_{j-1/2}^{(n)}}^{t_{j+1/2}^{(n)}} F_{ij} D_m D_n dt\,dz + \rho_{mn}. \tag{6}$$

Далее имеет место для $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ равенство

$$\int\limits_{t_{i-1/2}^{(m)}}^{t_{i+1/2}^{(m)}}\int\limits_{t_{j-1/2}^{(n)}}^{t_{j+1/2}^{(n)}} F_{ij}(t, z)\, D_m(t)\, D_n(t)\,dt\,dz =$$

$$= \frac{(-1)^{i+j}}{16}\int\limits_0^{1/2 h^{(m)}}\int\limits_0^{1/2 h^{(n)}} \{[(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)(p_1+p_2)(q_1+q_2)] +$$

$$+ [(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)(p_1-p_2)(q_1+q_2)] + [(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)(p_1+p_2)(q_1-q_2)] +$$
$$+ [(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(p_1-p_2)(q_1-q_2)]\} \times$$
$$\times \sin\frac{2m+1}{2}u \sin\frac{2n+1}{2}v\,du\,dv = I_1^{(i,j)} + I_2^{(i,j)} + I_3^{(i,j)} + I_4^{(i,j)},$$

где

$$\alpha_1 = F_{ij}(t_i^{(m)} - u, t_j^{(n)} - v), \quad \alpha_2 = F_{ij}(t_i^{(m)} - u, t_j^{(n)} + v),$$
$$\alpha_3 = F_{ij}(t_i^{(m)} + u, t_j^{(n)} - v), \quad \alpha_4 = F_{ij}(t_i^{(m)} + u, t_j^{(n)} + v),$$

$$p_1 = \frac{1}{\sin\frac{t_i^{(m)} - u}{2}}, \quad p_2 = \frac{1}{\sin\frac{t_i^{(m)} + u}{2}}, \quad q_1 = \frac{1}{\sin\frac{t_j^{(n)} - v}{2}}, \quad q_2 = \frac{1}{\sin\frac{t_j^{(n)} + v}{2}},$$

а $I_1^{(i,j)}$ обозначает двойной интеграл от произведения выражения, стоящего в первых квадратных скобках, и $\sin(m + {}^1/_2)\,u \sin(u + {}^1/_2)\,v$; $I_2^{(i,j)}$, $I_3^{(i,j)}$ и $I_4^{(i,j)}$ имеют, соответственно, аналогичные значения.

В силу условия (1), будем иметь неравенство

$$|F_{ij}(t_i^{(m)} + u, t_j^{(n)} + v)| = |f(t_i^{(m)} + u, t_j^{(n)} + v) - f(t_i^{(m)}, t_j^{(n)})| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_1(h^{(m)}) + \omega_2(h^{(n)}). \tag{7}$$

Пользуясь этим неравенством, обозначениями (3), а также соотношениями (4), мы устанавливаем, что

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |I_2^{(i,j)}| \leqslant O\{\ln n\,(\omega_1(h^{(m)}) + \omega_2(h^{(n)}))\}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |I_3^{(i,j)}| \leqslant O\{\ln m\,(\omega_1(h^{(m)}) + \omega_2(h^{(n)}))\}, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |I_4^{(i,j)}| \leqslant O(\omega_1(h^{(m)})) + O(\omega_2(h^{(n)})). \tag{10}$$

Соединяя (8), (9) и (10), видим, что (6) можно представить так:

$$\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi f D_m D_n\,dt\,dz = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n I_1^{(i,j)} + \rho_{mn}. \tag{11}$$

Далее, из (1) легко следует, что

$$|\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4| \leqslant 2 \min\{\omega_1(2u), \omega_2(2v)\}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует неравенство

$$\left|\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f D_m D_n\, dt\, dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{{}^1/_2 h^{(m)}}\int_0^{{}^1/_2 h^{(n)}} \min\{\omega_1(2u), \omega_2(2v)\} \times$$
$$\times (p_1+p_2)(q_1+q_2)\sin\frac{2m+1}{2}u \sin\frac{2n+1}{2}v\, du\, dv + \rho_{mn}, \tag{13}$$

правая часть которого равна (2).

Теперь докажем, что в этом соотношении имеет место знак равенства. С этой целью положим:

$$f_{mn}(t, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant t_1^{(m)}, \quad 0 \leqslant z \leqslant \pi; \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant z \leqslant t_1^{(n)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi; \\ {}^1/_2 \min\{\omega_1[2(t - t_1^{(m)})], \omega_2[2(z - t_1^{(n)})]\}, & \\ & \text{если } t_1^{(m)} \leqslant t \leqslant t_{{}^3/_2}^{(m)}, t_1^{(n)} \leqslant z \leqslant t_{{}^3/_2}^{(n)}. \end{cases}$$

После того как мы определили функцию f_{mn} в прямоугольнике $t_1^{(m)} \leqslant t \leqslant t_{{}^3/_2}^{(m)}$, $t_1^{(n)} \leqslant z \leqslant t_{{}^3/_2}^{n}$, она будет однозначно определена в прямоугольнике

$$t_1^{(m)} \leqslant t \leqslant \pi, \quad t_1^{(n)} \leqslant z \leqslant \pi, \tag{14}$$

если мы потребуем, чтобы она удовлетворяла в прямоугольнике (14) условиям

$$f_{mn}(t_{k+{}^1/_2}^{(m)} - \tau, z) = f_{mn}(t_{k+{}^1/_2}^{(m)} + \tau, z), \quad f_{mn}(t_k^{(m)} + \tau, z) = -f_{mn}(t_k^{(m)} - \tau, z),$$
$$f_{mn}(t, t_{k+{}^1/_2}^{(n)} - \zeta) = f_{mn}(t, t_{k+{}^1/_2}^{(n)} + \zeta), \quad f_{mn}(t, t_k^{(n)} + \zeta) = -f_{mn}(t, t_k^{(n)} - \zeta)$$

при любых значениях τ, ζ и целом k.

Аналогично эта функция определяется в остальных трех четвертях квадрата $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant z \leqslant \pi$ и затем продолжается на всю плоскость так, чтобы она имела период 2π по t и z.

Можно убедиться в том, что $f_{mn} \in H_{\omega_1, \omega_2}$, если ω_1 и ω_2 выпуклые функции, а в общем случае ${}^1/_2 f_{mn} \in H_{\omega_1, \omega_2}$. Кроме того, для $f = f_{mn}$ левая часть (13) равна правой, а правая часть асимптотически равна (2), что и доказывает теорему.

Замечание. В частном случае, если $\omega_1(h) = Mh$, а $\omega_2(h) = Nh$, то класс H_{ω_1, ω_2} совпадает с классом функций f периода 2π, удовлетворяющих условию $|\partial f / \partial x| \leqslant M$, $|\partial f / \partial y| \leqslant N$.

В этом случае оценка (2) представляет собой распространение известного результата А. Н. Колмогорова для первой производной.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность проф. С. М. Никольскому за помощь и руководство в работе.

Поступило
22 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, ДАН, **52**, 191 (1946).