Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. В. ЗЕРНОВ

О РЕШЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 VI 1951)

Рассмотрим уравнение

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{1}$$

которому в области, свободной от источников, удовлетворяет вектор напряженности электрического поля.

Предположим, что рассматриваемая область V ограничена координатной поверхностью $\xi = \xi_0$ ортогональной системы координат ξ, η, φ.

Пусть решение уравнения (1) в данной области удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$\mathbf{E}(\xi, \eta, \varphi, 0) = \mathbf{E}_t(\xi, \eta, \varphi, 0) = 0, \tag{2}$$

граничным условиям

$$\mathbf{E}_{tg}(\xi_0, \eta, \varphi, t) = \begin{cases} f\left[t - \dfrac{L(\xi_0, \eta, \varphi)}{v}\right] e^{-j\omega_0\left[t - \frac{L(\xi_0, \eta, \varphi)}{v}\right]}\, \overline{\Phi}(\eta, \varphi), \\ 0 \quad \text{при} \quad t - \dfrac{L(\xi_0, \eta, \varphi)}{v} \leqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

и условию

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{3'}$$

Здесь $\mathbf{E}_{tg}$ — составляющая вектора $\mathbf{E}$, касательная к граничной поверхности; $L(\xi, \eta, \varphi)$ — функция, определяющая поверхность фронта волны первичного источника; $\overline{\Phi}(\eta, \varphi)$ — известная функция на поверхности ξ_0; ω_0 — несущая угловая частота. Если рассматриваемая область соответствует внешнему относительно граничной поверхности пространству, то функция $\mathbf{E}$ должна также удовлетворять принципу излучения на бесконечности.

Будем искать решение уравнения (1) при начальных условиях (2), граничных условиях (3) и условии (3′) в виде векторного аналога обобщенного интеграла Фурье

$$\mathbf{E} = \int\limits_{j\alpha-\infty}^{j\alpha+\infty} \mathbf{F}(\xi, \eta, \varphi, \omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega, \quad \alpha \geqslant 0. \tag{4}$$

Тогда преобразованное по Фурье уравнение (1) с учетом нулевых начальных условий будет иметь вид:

$$\int_0^\infty \Delta \mathbf{E} e^{j\omega t}\, dt + \frac{\omega^2}{v^2}\int_0^\infty \mathbf{E} e^{j\omega t}\, dt = 0,$$

откуда следует (при условии законности перестановки порядка дифференцирования и интегрирования), что функция

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathbf{E}(\xi, \eta, \varphi, t)\, e^{j\omega t}\, dt$$

должна удовлетворять уравнению

$$\Delta \mathbf{F} + \frac{\omega^2}{v^2}\mathbf{F} = 0. \tag{5}$$

Применяя трансформацию Фурье к условиям (3) и (3′), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathbf{E}_{tg}(\xi_0, \eta, \varphi, t)\, e^{j\omega t}\, dt = F(\omega)\, \overline{\Phi}(\eta, \varphi)\, e^{j\omega \frac{L(\xi_0, \eta, \varphi)}{v}},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 0.$$

Здесь функция

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, e^{j\omega t}\, dt$$

представляет собой спектр «начальной» функции $f(t)\, e^{-j\omega_0 t}$.

Таким образом, решение сформулированной выше краевой задачи электродинамики свелось к решению уравнения (5) при граничных условиях

$$\mathbf{F}_{tg}(\xi_0, \eta, \varphi, \omega) = \overline{\Phi}(\eta, \varphi)\, e^{j\omega \frac{L(\xi_0, \eta, \varphi)}{v}}\, F(\omega) \tag{6}$$

и условии $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, т. е. к исследованию той же электродинамической проблемы в установившемся режиме.

Обозначим решение уравнения (5) в области V при граничных условиях

$$\mathbf{F}'_{tg}(\xi_0, \eta, \varphi, \omega) = \overline{\Phi}(\eta, \varphi)\, e^{j\omega \frac{L}{v}}$$

через $\overline{\Psi}(\xi, \eta, \varphi, \omega)$.

Совершенно очевидно, что решение того же уравнения при граничных условиях (6) имеет вид:

$$\mathbf{F}(\xi, \eta, \varphi, \omega) = \mathbf{F}(\omega)\, \overline{\Psi}(\xi, \eta, \varphi, \omega). \tag{7}$$

Подставляя найденное значение $\mathbf{F}$ из (7) в исходное выражение, получим:

$$\mathbf{E} = \int_{j\alpha-\infty}^{j\alpha+\infty} F(\omega)\, \Psi(\xi, \eta, \varphi, \omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega. \tag{8}$$

Последний результат при известных условиях дает возможность сделать ряд практически полезных выводов. В самом деле, из выражения (7) следует, что спектр искомой функции E в каждой точке области V представляет собой произведение спектра «начальной» функции $f(t)\,e^{-j\omega_0 t}$ на некоторую векторную функцию, являющуюся пространственной частотно-фазовой характеристикой рассматриваемой электродинамической системы.

Так как пространственные частотно-фазовые характеристики ряда систем известны из решения соответствующих краевых задач в установившемся режиме, то изложенный здесь метод решения дает возможность исследовать протекающие в этих системах переходные процессы. При практическом решении аналогичных задач истинные частотно-фазовые характеристики электродинамических систем возможно аппроксимировать функциями, при которых вычисление интегралов типа (8) проводится до конца. Например, при исследовании нестационарного режима диффракции плоской волны относительно идеально проводящей сферы модуль пространственной характеристики $\overline{\Psi}$ при $r \to \infty$, $\theta = 0$, $\varphi = 0$ можно аппроксимировать (по крайней мере в пределах основной части спектра функции $f(t)\,e^{-j\omega_0 t}$) функцией

$$A - Be^{-\alpha_1 \omega} \cos(\beta_1 \omega),$$

где A, B, α_1 и β_1 — соответствующие постоянные, а аргумент $\overline{\Psi}$ — линейной функцией от ω. В этом случае приближенная оценка переходных процессов, возникающих в данной электродинамической системе, не представляет затруднений *.

В заключение пользуюсь возможностью выразить благодарность участникам семинара акад. В. И. Смирнова по математической физике за обсуждение статьи.

Поступило
21 VI 1951

* Направление $\theta = 0$, $\varphi = 0$ противоположно направлению движения фронта падающей волны.