

И. А. ЧАРНЫЙ

О ВЕЛИЧИНЕ ПРОМЕЖУТКА ВЫСАЧИВАНИЯ ПРИ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 25 VI 1951)

1. Теория безнапорного движения жидкости в пористой среде с промежуток высачивания разработана сравнительно недавно для прямоугольной перемычки на непроницаемом основании (^{1, 2}) (рис. 1). Теория же безнапорного радиального движения с промежуток высачивания — притока к колодцу (рис. 2), насколько известно, еще отсутствует.

Ниже предложен новый приближенный метод расчета величин промежутков высачивания для этих течений.

2. Рассмотрим установившееся безнапорное движение несжимаемой жидкости через прямоугольную перемычку на непроницаемом основании (рис. 1) при законе Дарси. В точной постановке задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа на плоскости

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2,1)$$

при граничных условиях

$$x = 0, \quad \Phi = kh_1; \quad (2,2)$$

$$x = L \quad \begin{cases} \Phi = kh_2, & 0 \leq y \leq h_2, \\ \Phi = ky, & h_2 \leq y \leq h_0; \end{cases} \quad (2,3)$$

h_0 — неизвестная ордината верхней точки участка высачивания CB (рис. 1);

$$y = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad (2,4)$$

На неизвестной границе свободной поверхности AB

$$\Phi = ky, \quad (2,5)$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0. \quad (2,6)$$

Здесь

$$\Phi = k \left(\frac{P}{\gamma} + z \right) \quad (2,7)$$

потенциал скорости, P — давление (избыточное), γ — удельный вес.

Уравнение (2,6) выражает, что кривая свободной поверхности AB является линией тока.

Решение этой задачи сопряжено с большими затруднениями ввиду того, что область, в которой оно ищется, является неизвестной и сама подлежит определению.

Вполне аналогичные уравнения могут быть составлены и для притока к скважине-колодцу (рис. 2).

и (3,8), дают при интегрировании нуль, и получаются формулы Дюпюи; Маскет считает их приближенными. Между тем (3), они строго точные. Это обстоятельство наводит на естественную мысль применить решения (3,7) и (3,8) для расчета промежутка высачивания, воспользовавшись тем обстоятельством, что расход на участке BE выходной грани, равном $h_1 - h_0$, должен равняться нулю.

Тогда для расчета ординаты h_0 — верхней точки промежутка высачивания — получим уравнение:

для перемычки (рис. 1)

$$\left(\int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \right)_{x=L} = 0; \quad (3,10)$$

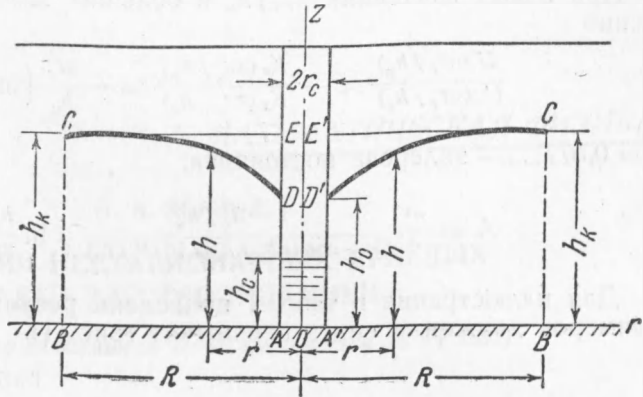


Рис. 2

для скважины (рис. 2)

$$\left(\int_{h_0}^{h_k} 2\pi r \frac{\partial \Phi}{\partial r} dz \right)_{r=r_c} = 0. \quad (3,11)$$

После вычислений получаем для h_0 следующие уравнения:

для перемычки (рис. 1)

$$\frac{(h_1^2 - h_0^2)(h_1 - h_0)}{2h_1^3 L} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos(n\pi h_2/h_1)}{n^2} \operatorname{cth} \frac{n\pi L}{h_1} \sin \frac{n\pi h_0}{h_1} = 0, \quad (3,12)$$

для скважины (рис. 2)

$$\frac{\pi^2}{4} \frac{h_k^2 - h_c^2}{h_k r_c \ln(R/r_c)} \left(1 - \frac{h_0}{h_k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos(n\pi h_c/h_k)}{n^2} \frac{U'(\alpha_n r_c)}{U(\alpha_n r_c)} \sin \frac{n\pi h_0}{h_k}, \quad (3,13)$$

$$U'(\alpha_n r_c) = I_1\left(\frac{n\pi r_c}{h_k}\right) K_0\left(\frac{n\pi R}{h_k}\right) + I_0\left(\frac{n\pi R}{h_k}\right) K_1\left(\frac{n\pi r_c}{h_k}\right). \quad (3,14)$$

Уравнения (3,12) и (3,13) приходится решать графически, причем ряд пробных расчетов показал, что при значениях параметра A (см. ниже), лежащих в пределах $0,8 < A < 2,7$, можно ограничиться одним членом ряда и определить h_0 из более простых уравнений

$$A \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) = \sin \varphi, \quad (3,15)$$

или

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{\pi} - \sqrt{2 + \left(\frac{A}{\pi}\right)^2} - A. \quad (3,16)$$

При этом для перемычки

$$\varphi = \frac{\pi h_0}{h_1}, \quad A = \frac{\pi^2}{4} \frac{h_1}{L} \frac{1 - h_2^2/h_1^2}{1 + \cos(\pi h_2/h_1)} \operatorname{th} \frac{\pi L}{h_1}; \quad (3,17)$$

для скважины

$$\varphi = \frac{\pi h_0}{h_k}; \quad A = -\frac{\pi^2}{4} \frac{h_k}{r_c} \frac{1 - h_c^2/h_k^2}{(1 + \cos(\pi h_c/h_k)) \ln(R/r_c)} \frac{U(\alpha_1 r_c)}{U'(\alpha_1 r_c)}. \quad (3,18)$$

При малых значениях $\pi r_c/h_k$ и больших значениях $\pi R/h_k$ приближенно

$$\frac{U(\pi r_c/h_k)}{U'(\pi r_c/h_k)} \approx -\frac{K_0(\pi r_c/h_k)}{K_1(\pi r_c/h_k)} \approx -\frac{\pi r_c}{h_k} \left(\ln \frac{h_k}{\pi r_c} - \gamma \right); \quad (3,19)$$

$\gamma = 0,577\dots$ — эйлерова постоянная;

$$A = \frac{\pi^3}{4} \frac{1 - h_c^2/h_k^2}{(1 + \cos(\pi h_c/h_k)) \ln(R/r_c)} \left(\ln \frac{h_k}{\pi r_c} - \gamma \right). \quad (3,20)$$

Для иллюстрации в табл. 1 приведены результаты расчетов трех примеров движения через перемычку (рис. 1).

Таблица 1

№ пп.	Размеры перемычки	Промежуток высачивания h_0			
		по формуле (3, 19) (5 членов ряда)	по формуле (3,15)	по формуле (3,16)	точное решение (Маскет)
1	$h_1 = 0,322$ $h_2 = 0,084$ $L = 0,162$	0,200	0,205	0,205	0,206
2	$h_1 = 0,670$ $h_2 = 0,158$ $L = 0,444$	0,320	0,335	0,324	0,360
3	$h_1 = 0,672$ $h_2 = 0$ $L = 0,329$	0,400	0,396	0,391	0,43

Московский нефтяной институт
им. И. М. Губкина

Поступило
17 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ П. Я. Полубаринова-Кочина, Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод, изд. АН СССР, 1942. ² М. Маскет, Движение однородной жидкости в пористой среде, 1949. ³ И. А. Чарный, ДАН, 79, № 6 (1951).