

И. М. ХАЛАТНИКОВ

ЗВУК БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ГЕЛИИ II

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 14 V 1951)

В недавно опубликованной работе (1) была экспериментально доказана возможность наблюдения температурных разрывов в гелии II. Сделанная в связи с этим попытка теоретического разбора этого вопроса (2) не может быть признана удовлетворительной, так как указанная работа базируется на находящейся в противоречии с законом сохранения энергии системе гидродинамических уравнений. Далее автор использует ошибочное противоречащее эксперименту положение теории Тиссы о пропорциональности энтропии S и плотности нормальной части гелия II ρ_n . Наконец, в полученной при этом предположении формуле, определяющей скорость точек профиля бегущей волны, автор не учел отличия местной скорости звука от значения скорости в первом приближении.

Рассмотрим задачу о распространении звуковых колебаний в гелии II во втором приближении. При этом под первым приближением мы понимаем решение, получающееся из линеаризованной системы гидродинамических уравнений. Полная система гидродинамических уравнений для гелия II, согласно (3), имеет вид

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial j_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (p \delta_{ik} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk}) = 0, \quad (2)$$

$$\partial \rho S / \partial t + \operatorname{div} \rho S \mathbf{v}_n = 0, \quad (3)$$

$$\partial \mathbf{v}_s / \partial t + \nabla (\Phi + \frac{1}{2} v_s^2) = 0. \quad (4)$$

Здесь ρ — плотность, S — энтропия единицы массы; p — давление, \mathbf{j} — поток вещества, равный $\rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$; \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s — скорости нормального и сверхтекучего движений в гелии II; ρ_n и ρ_s — плотности нормальной и сверхтекучей частей; Φ — термодинамический потенциал, являющийся функцией скорости относительного движения $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ и равный $\Phi = \Phi_0(p, T) - \rho_n (v_n - v_s)^2 / 2\rho$.

Из термодинамического тождества для потенциала Φ следует, что энтропия S и плотность ρ , выраженные через давление p и температуру T , также являются функциями скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$: $S = S_0 + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{2\rho} \right) (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$, $S_0 = - \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial T} \right)_p$; $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{2\rho} \right) (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$, $\frac{1}{\rho_0} = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial p} \right)_T$.

Для потенциала Φ_0 имеет место тождество

$$d\Phi_0 = -S_0 dT + (1/\rho_0) dp. \quad (5)$$

Введем для удобства скорость \mathbf{v} , связанную с потоком \mathbf{j} соотношением $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, и обозначим разность скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ одной буквой \mathbf{w} . Мы будем искать такое решение системы (1—4), которое описывало бы бегущую в одном направлении волну. При этом будем считать малой величину \mathbf{w} . Что же касается скорости \mathbf{v} , то на ее величину никаких ограничений не налагаем. Практически представляет интерес только случай малых значений \mathbf{w} , поскольку при больших значениях возможно нарушение сверхтекучести. Рассмотрим звуковую волну, распространяющуюся по оси x . В бегущей волне все величины можно выразить друг через друга, иначе говоря, все величины являются функциями некоторого параметра. Координата x и время t являются функциями того же параметра. Скорость точек профиля в волне будет поэтому равна производной dx/dt , взятой при некотором значении этого параметра. Обозначив производные от функций по указанному параметру штрихом и ограничиваясь линейными по величине членами, перепишем систему (1—4) в виде*

$$(v - u) \frac{\partial \rho}{\partial T} T' + (v - u) \frac{\partial \rho}{\partial p} p' + (v - u) \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \omega \omega' + \rho v' = 0, \quad (6)$$

$$v(v - u) \frac{\partial \rho}{\partial T} T' + \left[1 + v(v - u) \frac{\partial \rho}{\partial p} \right] p' + \\ + \left[v(v - u) \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) + 2 \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} \right] \omega \omega' + \rho (2v - u) v' = 0, \quad (7)$$

$$\left[\rho(v - u) \frac{\partial S}{\partial T} + \omega \frac{\partial}{\partial T} (\rho_s S) \right] T' + \left[\rho(v - u) \frac{\partial S}{\partial p} + \omega \frac{\partial}{\partial p} (\rho_s S) \right] p' + \\ + \left[\rho_s S + \rho(v - u) \omega \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \right] \omega' = 0, \quad (8)$$

$$\left[-S - (v - u) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \omega \right] T' + \left[\frac{1}{\rho} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) (v - u) \omega \right] p' + \\ + \left[-\frac{\rho_n}{\rho} (v - u) - \frac{\rho_n \rho_s}{\rho^2} \omega \right] \omega' + \left[(v - u) - \frac{\rho_n}{\rho} \omega \right] v' = 0. \quad (9)$$

Условие совместности полученной таким образом системы есть равенство нулю ее определителя. Раскроем указанный определитель и пренебрежем всеми членами, содержащими производную $\partial \rho / \partial T$. После несложных выкладок получаем уравнение

$$\{(u - v)^2 \partial \rho / \partial p - 1\} \{[\rho_n \rho (u - v)^2 \partial S / \partial T - S^2 \rho \rho_s] - \\ - \omega (u - v) [4\rho_s \rho_n \partial S / \partial T - 2S \rho \partial \rho_n / \partial T]\} = 0, \quad (10)$$

определяющее скорость u . Полученное уравнение распадается на два уравнения. Первое из них есть $(u - v)^2 \partial \rho / \partial p - 1 = 0$. Оно определяет хорошо известное из обычной гидродинамики риманово решение. Решая его, находим

$$u_1 = c_1 + v, \quad c_1^2 = \partial p / \partial \rho. \quad (11)$$

Приравняв нулю вторую скобку в (10), получаем уравнение $\rho_n \rho (u - v)^2 \partial S / \partial T - S^2 \rho \rho_s - \omega (u - v) [4\rho_s \rho_n \partial S / \partial T - 2S \rho \partial \rho_n / \partial T] = 0$, корень которого равен

$$u_2 = c_2 + v + \omega \left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{S}{\rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial S} \right), \quad c_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} S^2 \frac{\partial T}{\partial S}. \quad (12)$$

* У векторных величин индекс x опускаем. Также опускаем индекс 0 у величин S_0 и ρ_0 .

Выражение (12) определяет скорость точек профиля волны второго звука во втором приближении.

Первый звук представляет собой волну сжатия и разрежения. В такой волне отклонение давления от равновесного значения δp , согласно уравнению (6), связано со скоростью v в первом приближении соотношением $\delta p = \rho (v / c_1) (\partial p / \partial \rho)$.

Скорость c_1 есть местная скорость звука, изменяющаяся от точки к точке профиля с изменением давления. Разложим в (11) выражение для c_1 в ряд по величине δp ; ограничиваясь линейным членом, имеем

$$u_1 = c_{10} + \frac{\partial c_1}{\partial p} \delta p + v = c_{10} + v \left(1 + \frac{\rho}{c_{10}} \frac{\partial c_{10}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) = c_{10} + \frac{1}{c_{10}} \frac{\partial}{\partial \rho} (c_{10} \rho) v \quad (13)$$

(c_{10} — значение скорости первого звука для равновесных значений давления и температуры). Тот факт, что различные точки профиля движутся с различной скоростью, приводит, как известно, к искажению профиля и возникновению разрывов. Величина $\alpha_1 = \frac{1}{c_{10}} \frac{\partial}{\partial \rho} (c_{10} \rho)$ для всех известных сред имеет положительный знак. Поэтому области повышенного давления движутся со скоростью больше c_{10} , а области разрежения со скоростью меньше c_{10} . В результате разрыв образуется на переднем фронте волны. Скорость возникающего разрыва равна полусумме скоростей с обеих сторон разрыва ((⁴), § 78)

$$u_1 = c_{10} + 1/2 \alpha_1 (v_1 + v_2) \quad (14)$$

(v_1 и v_2 — скорости среды с обеих сторон разрыва).

Второй звук является свойством, характерным только для гелия II, он представляет собою температурную волну. В такой волне при отсутствии связи между вторым и первым звуками скорость v равна нулю, а отклонение температуры от равновесного значения δT , согласно (8), связано с величиной w соотношением

$$\delta T = \frac{\rho_s S}{\rho c_2} \frac{\partial T}{\partial S} w. \quad (15)$$

Формула (12) определяет скорости точек профиля во втором звуке, входящая в эту формулу скорость c_2 есть местная скорость второго звука, изменяющаяся от точки к точке профиля волны с изменением величины δT . Для того чтобы получить скорость точек профиля в интересующем нас втором приближении, необходимо разложить c_2 до членов, линейных по величине δT ; в результате с помощью (15) находим

$$u_2 = c_{20} + \frac{\partial c_2}{\partial T} \delta T + w \left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{S}{\rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial S} \right) = c_{20} + w \frac{\rho_s S}{\rho} \frac{\partial T}{\partial S} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(c_{20}^3 \frac{\partial S}{\partial T} \right) \quad (16)$$

($c_{20}^2 = (\rho_s / \rho_n) S^2 \partial T / \partial S$ — скорость второго звука как функция равновесных значений давления и температуры).

Точки профиля волны второго звука согласно (16) движутся с различными скоростями. Это приводит к изменению формы профиля волны со временем. В тот момент, когда форма профиля становится неоднозначной функцией координаты, возникают разрывы — в данном случае температурные разрывы. Скорости точек профиля волны на поверхности разрыва изменяются скачком. Пусть значения относительной скорости с обеих сторон поверхности разрыва равны w_1 и w_2 , скорость поверхности разрыва тогда равна полусумме скоростей u_2 с обеих сторон поверхности, т. е.

$$u_2 = c_{20} + \frac{1}{2} (w_1 + w_2) \frac{\rho_s S}{\rho} \frac{\partial T}{\partial S} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(c_{20}^3 \frac{\partial S}{\partial T} \right). \quad (17)$$

Во втором звуке скорость w связана со скоростью нормального движения соотношением $w = (\rho / \rho_s) v_n$. Выражая величину w через v_n , перепишем (17) в виде

$$u_2 = c_{20} + \frac{1}{2} \alpha_2 (v_{n1} + v_{n2}), \quad \text{где } \alpha_2 = \frac{ST}{C} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(c_{20}^3 \frac{C}{T} \right), \quad C = T \frac{\partial S}{\partial T}. \quad (18)$$

Коэффициент α_2 меняет знак при изменении температуры. Зависимость его от температуры изображена графически на рис. 1. При температурах выше $1,90^\circ \text{K}$ и в интервале $0,5-0,9^\circ \text{K}$ $\alpha < 0$, в остальной области $\alpha > 0$. В области температур, где $\alpha < 0$, поверхности разрыва возникают на заднем фронте волны, в области же температур, где $\alpha > 0$, наоборот, на переднем фронте волны. Возникновение разрыва на заднем фронте волны является специфическим свойством второго звука в гелии II, неизвестным для обычного звука. Следует заметить, что, строго говоря, с момента возникновения разрыва звуковое приближение становится неприменимым. Однако, как показывает расчет для гелия II, скорость нормального разрыва небольшой интенсивности совпадает с тем, что дает для скорости второе звуковое приближение. Ситуация аналогична той, которая имеет место в обычной гидродинамике.

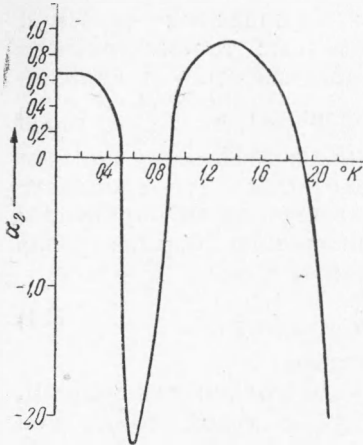


Рис. 1. Температурная зависимость коэффициента

$$\alpha_2 = \frac{ST}{C} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(c_{20}^3 \frac{C}{T} \right)$$

Осборн (1) наблюдал изменение формы прямоугольного импульса температуры, распространяющегося в гелии II. Указанный импульс постепенно принимал форму треугольного зубца, одна из сторон которого была вертикальной. Это указывает на то, что в этих опытах наблюдалось образование разрывов. Скорость поверхности разрыва вблизи λ -точки оказывалась, в соответствии с нашими результатами, больше скорости второго звука, при низких же температурах (несколько больше 1°K), наоборот, меньше скорости второго звука. При температуре $1,05^\circ \text{K}$ и мощности в импульсе до $1,3 \text{ вт/см}$ скорость разрыва (ударной волны) превышала скорость второго звука на $1,8 \text{ м/сек}$. Вычисленное значение энтропии при этой температуре равно $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ кал/г} \cdot \text{град}$. Скорость v_n на зубце равнялась $q / \rho TS = 4,15 \text{ м/сек}$. Умножив полусумму значений v_n на зубце и в основании зубца (нуль) на величину α_2 , взятую с графика, получаем $u_2 - c_{20} = 1,5 \text{ м/сек}$ в достаточном согласии с результатами измерений. В заключение выражаю глубокую благодарность акад. Л. Д. Ландау за интересную дискуссию и постоянный интерес к работе.

Институт физических проблем
им. С. И. Вавилова
Академии наук СССР

Поступило
23 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ D. V. Osborne, Proc. Phys. Soc., **64**, 114 (1951). ² H. N. V. Temperley, ibid., **64**, 105 (1951). ³ Л. Ландау, ЖЭТФ, **11**, 592 (1941). ⁴ Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1944.