Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 2

ФИЗИКА

А. Д. ГАЛАНИН

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 17 V 1951)

В работе ([1]) были сформулированы правила для написания матричного элемента любого перехода квантово-электродинамической системы в любом приближении по заряду электрона. Эти правила были обоснованы ([2]), исходя из уравнения Шредингера для системы взаимодействующих электронного и фотонного полей, записанного в представлении взаимодействия ([3]). Мы покажем, что те же правила можно получить, не переходя к представлению взаимодействия (см. также ([4])).

Пользуясь обозначениями работы ([1]), запишем уравнение для электрона во внешнем потенциале $\mathbf{a} = a_\mu \gamma_\mu$ (заряд электрона включен в $\mathbf{a}$)

$$(\mathbf{p} - m - \mathbf{a})\,\psi(x) \equiv L\psi(x) = 0 \tag{1}$$

и уравнение для электромагнитных потенциалов A_μ (при отсутствии взаимодействия с электронами)

$$\mathbf{p}^2 A_\mu = 0. \tag{2}$$

В работе ([1]) было показано, как нужно выбирать функцию Грина уравнений (1) и (2) для того, чтобы в (1) учесть фон электронов отрицательной энергии, а второе уравнение описывало взаимодействие, передаваемое фотонами положительной энергии ([5]). Зная функцию Грина, можно вычислить сумму по полной системе ортогональных и нормированных функций вида $\sum\limits_k A_k(x)\,A_k^*(x)$. Если $\psi_n(x)$ и $A_k(x)$ — собственные функции уравнений (1) и (2), то легко можно получить следующие формулы:

$$\sum_k A_k(x)\,f(\mathbf{p})\,A_k^*(x) = \frac{i}{\pi}\int d^4k\,k^{-2} f(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \tag{3}$$

где $f(\mathbf{p})$ — любая функция оператора $\mathbf{p}$, $d^4k = (2\pi)^{-2}\,dk_1\,dk_2\,dk_3\,dk_4$ и при вычислении интеграла нужно обойти полюс $k_4 = \pm\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}$, сделав замену $k_4^2 \to k_4^2 + i\delta$, и

$$\sum_{E_n<0} (\bar{\psi}_n(x))_\alpha M_{\alpha\beta} (\psi_n(x))_\beta = \frac{1}{4\pi^2 i}\int d^4k\,\mathrm{Sp}\,[M(L-\mathbf{k})^{-1}]\cdot 1, \tag{4}$$

где $M_{\alpha\beta}$ — матрица относительно спинорных индексов, $\bar{\psi} = \psi^*\beta$ и сумма берется по всем состояниям с отрицательной энергией. Оператор

$(L - \mathbf{k})^{-1}$ определен рядом по степеням $\mathbf{a}$. Полюс в (4) обходится так же, как в (3).

Обозначим Ψ и A_μ квантованные операторы электронного и фотонного полей. Уравнения для Ψ и $\mathbf{A}$ с учетом взаимодействия имеют вид:

$$L\Psi = \mathbf{A}\Psi, \tag{5}$$

$$\mathbf{p}^2\mathbf{A} = -4\pi e^2 \mathbf{I}, \tag{6}$$

где

$$I_\mu = {}^1/_2(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi - \bar{\Psi}'\gamma_\mu\Psi') \tag{7}$$

и Ψ' — зарядово-сопряженный оператор.

Если мы ограничимся одноэлектронными задачами, что среднее значение оператора тока (7) по электронному вакууму есть сумма по состояниям отрицательной энергии вида (4). Таким образом из (6) можно исключить электронные операторы Ψ:

$$\mathbf{p}^2\mathbf{A} = -\frac{e^2}{2\pi i}\gamma_\mu \int d^4k \,\mathrm{Sp}\,[\gamma_\mu (L - \mathbf{k} - \mathbf{A})^{-1} - \gamma_\mu (L' - \mathbf{k} + \mathbf{A})^{-1}] \cdot 1, \tag{8}$$

где L' отличается от L знаком $\mathbf{a}$ и 1 после Sp означает, что дифференциальные операторы в L действуют только на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{A}$. Уравнение (8) для оператора $\mathbf{A}$ можно решить по методу последовательных приближений:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots, \tag{9}$$

где $\mathbf{A}_1$ — решение (8) без правой части, т. е. поле свободных фотонов. Следующие члены дают видоизменение фотонного поля, вызванное наличием фона электронов отрицательной энергии (неликейная электродинамика). Если мы разложим правую часть (8) по степеням $\mathbf{a} + \mathbf{A}$, то, очевидно, что исчезают все четные степени $\mathbf{a} + \mathbf{A}$ (теорема Фарри ([6])).

Пусть $\mathbf{A}$ в (5) есть точное решение уравчения (8). Вместо (5) рассмотрим интегральное уравнение:

$$\Psi = \Psi_0 + L^{-1}\mathbf{A}\Psi, \tag{10}$$

где $L\Psi_0 = 0$. Решение (10), построенное по методу последовательных приближений, имеет вид:

$$\Psi = (1 + L^{-1}W)\Psi_0 \tag{11}$$

или

$$L\Psi = W\Psi_0, \tag{12}$$

где

$$W = \mathbf{A} + \mathbf{A}(L - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}, \tag{13}$$

причем $(L - \mathbf{A})^{-1}$ есть ряд по степеням $\mathbf{A}$.

Вероятность перехода электрона из состояния n в состояние n' (n и n' — состояния электрона, не взаимодействующего с полем излучения) с одновременным переходом фотонного поля из состояния m в состояние m' дается матричным элементом

$$(n', m' \,|W|\, n, m). \tag{14}$$

В частном случае, когда нет реальных фотонов в состояниях m и и m', то W_{00} есть среднее значение W по фотонному вакууму. Реальные фотоны можно объединить с внешним полем, и тогда (14) будет ($L = \mathbf{p} - m - \mathbf{a} - \mathbf{A}_p$, где $\mathbf{A}_p$ — поле реальных фотонов):

$$(\bar{\psi}^0_{n'}(x)|\, W_{00} |\psi^0_n(x)). \tag{15}$$

При вычислении (15) нужно произвести разложение L по полю реальных фотонов и по внешнему полю до такой степени, которая сможет обеспечить рассматриваемый переход и дает желаемую точность по отношению к внешнему полю. Усреднение по фотонному вакууму можно произвести с помощью формулы (3). Для простейшего случая имеем *:

$$< \mathbf{A}_1 L^{-1} \mathbf{A}_1 >_{00} = \frac{e^2}{\pi i} \int d^4 k\, \mathbf{k}^{-2} \gamma_\mu (L - \mathbf{k})^{-1} \gamma_\mu. \tag{16}$$

Более сложные операторы, содержащие несколько раз **A**, строятся аналогично (16) в полном соответствии с правилами ([1]). Присутствие в W (13) следующих членов разложения (9) означает появление в соответствующей диаграмме ([2]) «замкнутых петель». В этом случае при вычислении среднего по фотонному вакууму нельзя пользоваться формулой (3), поскольку уравнение (2) теперь не имеет места и заменяется более сложным уравнением, которое можно получить из (8). Поскольку в правой части (8) стоит знак минус, то матричный элемент W будет содержать множитель $(-1)^l$, где l — число замкнутых петель в диаграмме ([2]).

При вычислении (15), кроме бесконечностей, возникающих при интегрировании по импульсам виртуальных фотонов, могут быть бесконечности, связанные с тем, что $L\psi_n^0(x) = 0$ и $L^{-1}\psi_n^0(x) = \infty$ (в обычной теории возмущения это соответствует обращению в нуль знаменателя в формулах теории возмущения). Чтобы избежать этих бесконечностей, возьмем среднее по фотонному вакууму от (12):

$$L\Psi = W_{00}\Psi_0, \tag{17}$$

выразим Ψ_0 через Ψ аналогично (11) и подставим обратно в (17). В результате мы получим уравнение для волновой функции $\psi(x)$

$$L\,\psi(x) = U\psi(x), \tag{18}$$

где $U = W_{00} - W_{00}(L + W_{00})^{-1} W_{00}$ можно назвать эффективным потенциалом, заменяющим собой взаимодействие электрона с полем излучения.

При вычислении матричных элементов U необходимо иметь в виду, что U действует на ψ-функцию не в виде плоской волны, и поэтому $(\mathbf{p}^2 - m^2)\,\psi(x) \neq 0$ (см. ([7])).

При распространении настоящего метода на многоэлектронные задачи не встречается принципиальных трудностей. В этом случае в операторе тока (7) нужно учесть ток перехода для различных электронов с положительной энергией; соответственно и в ряду (9) появятся дополнительные члены. Результат и в этом случае совпадает с правилами ([1]). Анализ и исключение бесконечностей можно произвести аналогично ([2]), рассматривая вместо «типичных» диаграмм различные члены ряда (9) и средние значения вида (16).

Рассмотренный метод можно применить также и к мезонным полям, взаимодействующим с нуклонами и фотонами. В этом случае наступает особенно сильное упрощение по сравнению с представлением взаимодействия, поскольку гамильтониан в представлении взаимодействия содержит члены, зависящие от нормали к поверхности σ ([8]), и необходимо специальное исследование, чтобы убедиться, что эти члены не входят в физические результаты ([9]).

---

* Подразумевается, что при вычислении интеграла по импульсам виртуальных фотонов используется релятивистски инвариантный обрезающий множитель.

Вопрос о сходимости метода последовательных приближений и о возможности использовать полученные выражения без разложения в ряд по степеням заряда остается открытым.

Автор выражает признательность акад. Л. Д. Ландау, проф. И. Я. Померанчуку и В. Б. Берестецкому за участие в обсуждении затронутых здесь вопросов.

Поступило
16 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. P. Feynman, Phys. Rev., **76**, 749, 769 (1949). [2] F. J. Dyson, ibid., **75**, 486, 1736 (1949). [3] J. Schwinger, ibid., **74**, 1439 (1948); S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **1**, 27 (1946). [4] G. Källén, Ark. f. Fysik, **2**, 187 (1950); C. N. Yang and D. Feldman, Phys. Rev., **79**, 972 (1950). [5] M. Fierz, Helv. Phys. Acta, S. **23**, 731 (1950). [6] W. H. Furry, Phys. Rev., **51**, 125 (1937). [7] А. А. Абрикосов и И. М. Халатников, ЖЭТФ, **21**, 429 (1951). [8] S. Kanesawa and Tomanaga, Prog. Theor. Phys., **3**, 1, 101 (1948); P. T. Matthews, Phys. Rev., **75**, 1270 (1949). [9] P. T. Matthews, ibid., **76**, 684, 1657 (1949); F. Rohrlich, ibid., **80**, 666 (1950).