

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. РУБИНШТЕЙН

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ
С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ФАЗОВЫМ СОСТОЯНИЕМ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 IV 1951)

Пусть имеется n плоско-параллельных слоев ($b_{i-1} < x < b_i$; $i = 1, 2, \dots, n$), заполненных средой, в которой теплота распространяется посредством теплопроводности. Пусть в i -слое теплопроводящая среда находится в m_i фазовых состояниях, характеризуемых коэффициентами теплопроводности k_{ij} , температуропроводности a_{ij}^2 , температурой и скрытой теплотой перехода $\vartheta_{ij}(x)$ и $\lambda_{ij}(x)$, соответственно. Пренебрегая объемным эффектом фазового перехода, относим $\lambda_{ij}(x)$ к единице объема образующейся фазы. Процесс фазового перехода считаем протекающим без переохлаждения и перегрева. Коэффициенты k_{ij} и a_{ij}^2 считаем постоянными.

Пусть $x = y_{ij}(t)$ — положение границы раздела фаз в слое i ($j = 1, 2, \dots, m_i - 1$) и $u_{ij}(x, t)$ — температура фазы (i, j). Требуется определить $u_{ij}(x, t)$ и $y_{ij}(t)$, исходя из условий:

$$a_{ij}^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial t}, \quad y_{i, j-1}(t) < x < y_{i, j}(t), \quad y_{i0}(t) \equiv l_{i-1}, \quad y_{i, m_i}(t) \equiv l_i; \quad (1)$$

$$u_{11}(l_0, t) = f_0(t), \quad u_{n, m_n}(l_n, t) = f_n(t), \quad u_{ij}(x, 0) = \varphi_{ij}(x); \quad (2)$$

$$u_{i, m_i}(l_i, t) = u_{i+1, 1}(l_i, t); \quad (3)$$

$$k_{i, m_i} \frac{\partial}{\partial x} u_{i, m_i}(l_i, t) = k_{i+1, 1} \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1, 1}(l_i, t); \quad (4)$$

$$u_{i, j}(y_j(t), t) = u_{i, j+1}(y_j(t), t), \quad j = 1, 2, \dots, m_i - 1; \quad (5)$$

$$\lambda_{ij}(y_{ij}(t)) \frac{d}{dt} y_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial x} k_{ij} \frac{\partial}{\partial x} u_{ij}(y_{ij}(t), t) - k_{i+1, j} \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1, j}(y_{ij}(t), t),$$

$$y_{ij}(0) = l_{ij}, \quad l_{i-1} < l_{ij} < l_{i, j+1} < l_i. \quad (6)$$

Задача (1) — (6) является наиболее общей из всех рассматривавшихся до сих пор одномерных задач уравнения теплопроводности для многослойной среды с неизменяющимся числом фаз. Она включает в себя, в частности, задачу Стефана для случая чередующихся фаз, рассмотренную недавно А. Дадцевым⁽¹⁾ (при $n = 1$, $\lambda_{ij} \equiv \lambda_0 = \text{const}$, $\vartheta_{ij} \equiv \vartheta_0 = \text{const}$), задачу о распространении тепла в n плоско-параллельных слоях с неизменяющимся фазовым состоянием, решенную для случая излучения на границе по закону Ньютона С. С. Ковнером⁽²⁾ методом контурных интегралов и позднее рассматривавшуюся

снова А. Дадцевым⁽³⁾ (при $m_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$). Предположение о зависимости ϑ_{ij} и λ_{ij} от x позволяет включить в рассмотрение важную с геофизической точки зрения задачу о распространении тепла в среде с изменяющимся фазовым состоянием в случае зависимости термических параметров среды от давления.

Пусть $v_{ij}^k(t) = \frac{\partial}{\partial x} u_{ij}(y_{ik}(t); t)$ ($k = j - 1, j; j = 1, 2, \dots, m_i; k \neq 0; k \neq m_i$). Пользуясь методом, развитым нами при решении задачи Стефана в двухфазном случае⁽⁴⁾, сводим задачу к системе функциональных уравнений типа Вольтерра для определения $v_{ij}^k(t)$ и $y_{ik}(t)$. Опуская вывод, выпишем эту систему:

$$v_{ij}^m(t) = V_{ij}^m(t; v_{ij}^k(\tau); y_{im}(t); y_{ik}(\tau); \dot{y}_{ik}(\tau)) \equiv 2 \int_{l_i, j-1}^{l_{ij}} \dot{\varphi}_{ij}(\xi) E(y_{im}(t) - \xi; a_{ij}^2 t) d\xi - \\ - 2 \int_0^t \left[a_{ij}^2 v_{ij}^k(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} E(y_{im}(t) - y_{ik}(\tau); a_{ij}^2(t - \tau)) - \right. \\ \left. - \dot{\vartheta}_{ik}(y_{ik}(\tau)) \dot{y}_{ik}(\tau) E(y_{im}(t) - y_{ik}(\tau), a_{ij}^2(t - \tau)) \right]_{k=j-1} d\tau, \\ j = 2, 3, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad m = j - 1, j; \quad (7)$$

$$v'_{i+1,1}(t) = V'_{i+1,1}(t; v'_{i+1,1}(\tau); f_i(\tau); y_{i+1,1}(t); y_{i+1,1}(\tau); \dot{y}_{i+1}(\tau)) \equiv \\ \equiv 2\varphi_{i+1,1}(l_i) G_i(y_{i+1,1}(t), l_i; a_{i+1,1}^2 t) + \\ + 2 \int_{l_i}^{l_{i+1,1}} \dot{\varphi}_{i+1,1}(\xi) G_i(y_{i+1,1}(t), \xi, a_{i+1,1}^2 t) d\xi + \\ + 2a_{i+1,1}^2 \int_0^t f_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} G_i(y_{i+1,1}(t); l_i; a_{i+1,1}^2(t - \tau)) d\tau - \\ - 2 \int_0^t \left[a_{i+1,1}^2 v'_{i+1,1}(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_i(y_{i+1,1}(t); y_{i+1,1}(\tau); a_{i+1,1}^2(t - \tau)) + \right. \\ \left. + \dot{\vartheta}_{i+1}(y_{i+1}(\tau)) \dot{y}_{i+1}(\tau) G_i(y_{i+1,1}(t); y_{i+1,1}(\tau), a_{i+1,1}^2(t - \tau)) \right] d\tau; \quad (8)$$

$$v_{i, m_i}^{m_i-1}(t) = V_{i, m_i}^{m_i-1}(t; v_{i, m_i}^{m_i-1}(\tau); y_{i, m_i-1}(t); y_{i, m_i}(\tau), \dot{y}_{i, m_i-1}(\tau); f_i(\tau)). \quad (9)$$

Здесь $E(x, a^2 t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности, $G_i(x, \xi, a^2(t - \tau))$ — функция Грина второй краевой задачи для полупрямой $x \geq l_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Наконец, $f_i(t)$ означает температуру фаз (i, m_i) и $(i + 1, 1)$ на границе их раздела $x = l_i$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) либо температуру концов $x = l_0, x = l_n$. $V_{i, m_i}^{m_i-1}$ получаем из $V'_{i+1,1}$ заменой индексов и переменной знаков во всех слагаемых за исключением второго. В уравнения (7) — (9) входят неизвестные температуры $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$). Выражаем их через $v_{ij}^k(t)$ и $y_{ik}(t)$ так, чтобы были выполнены условия (4), пользуясь методом, развитым А. Дадцевым⁽³⁾. Пусть, для определенности, $m_{i+1} \neq 1, m_i \neq 1$.

Положим $g_i(x, \xi, a^2(t - \tau))$ равной функции Грина первой краевой задачи для полупрямой $x \leq l_i$. Должны иметь:

$$\begin{aligned}
 u_{i+1,1}(x, t) = & a_{i+1,1}^2 \int_0^t f_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g_i(x, l_i; a_{i+1,1}^2(t - \tau)) d\tau + \\
 & + \int_0^t \left\{ a_{i+1,1}^2 v'_{i+1,1}(\tau) g_i(x, y_{i+1,1}(\tau), a_{i+1,1}^2(t - \tau)) + \right. \\
 & + \vartheta_{i+1,1}(y_{i+1,1}(\tau)) \left[\dot{y}_{i+1,1}(\tau) g_i(x, y_{i+1,1}(\tau), a_{i+1,1}^2(t - \tau)) - \right. \\
 & \left. \left. - a_{i+1,1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi} g_i(x, y_{i+1,1}(\tau); a_{i+1,1}^2(t - \tau)) \right] \right\} d\tau. \quad (10^*)
 \end{aligned}$$

Дифференцируя по x , интегрируя по t от 0 до s и переходя к пределу при $x \rightarrow l_i$, получим

$$\begin{aligned}
 Q_{i+1,1}^i(s) = & \lim_{x \rightarrow l_i} \int_0^s \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1,1}(x, t) dt = \\
 = & F_{i+1,1}(s) + \int_0^s f_i(\tau) \frac{d\tau}{a_{i+1,1} \sqrt{\pi(t - \tau)}}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Аналогичное выражение получим для $Q_{i,m_i}^i(s)$. Интегрируя условия (4) по t от 0 до s и сопоставляя результат с (10), придем к интегральному уравнению Абеля относительно $f_i(t)$. Обращение этого уравнения дает

$$f_i(t) = \frac{2\alpha_i}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{k_{i,m_i} F_{i,m_i}(s) - k_{i+1,1} F_{i+1,1}(s)}{\sqrt{t-s}} ds. \quad (11)$$

Здесь $\alpha_i = 1: \left[\frac{k_{i,m_i}}{a_{i,m_i}} + \frac{k_{i+1,1}}{a_{i+1,1}} \right]$.

Если $m_{i+1} = 1$ либо $m_i = 1$, в выражение u_{i,m_i} либо $u_{i+1,1}$ нужно ввести вместо g_i функцию Грина для отрезка $[l_{i-1}, l_i]$ либо $[l_i, l_{i+1}]$. В этом случае мы придем не к уравнению Абеля, но к его обобщенному уравнению. Поэтому $f_i(t)$ определится не в виде квадратуры (11), но как решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода, которое мы не выписываем за недостатком места.

Итак, во всех случаях

$$f_i(t) = f_i^*(t; y_{i,m_i-1}; y_{i+1,1}; V_{i,m_i}^{m_i-1}; V_{i+1,1}^1; f_i). \quad (12)$$

Таким образом, мы пришли к системе функциональных уравнений (7), (8), (9), (12), которая замкнется, если к ней присоединить условия Стефана (6). Эта система может быть решена методом последовательных приближений, определяемых равенствами

$$\begin{aligned}
 v_{ij}^{m,n}(t) = & V_{ij}^m(t; v_{ij}^{k,n-1}(\tau); y_{im}^{n-1}(t); y_{ik}^{n-1}(\tau); \dot{y}_{ik}^{n-1}(\tau); f_i^{n-1}(\tau)), \\
 \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\
 f_i^n(t) = & f_i^*(t; y_{i,m_i-1}^{n-1}; y_{i+1,1}^{n-1}; v_{i,m_i}^{m_i-1,n-1}; v_{i+1,1}^{1,n-1}; f_i^{n-1}(\tau)), \quad (13) \\
 \dot{y}_{ij}^n(t) = & \frac{k_{ij} v_{ij}^{j,n}(t) - k_{i,j+1} v_{i,j+1}^j(t)}{\lambda_{ij} (y_{ij}^{n-1}(t))}, \quad y_{ij}^n = l_{ij} + \int_0^t \dot{y}_{ij}^n d\tau.
 \end{aligned}$$

Нулевые приближения выбираются произвольно.

Доказательство сходимости процесса и единственности решения осуществляется так же, как и в (4). Как и там, существенным является требование неизменности числа фаз. Выполнение этого требования для достаточно малых t гарантировано неравенствами (6). Помимо существования и единственности решения систем (7), (8), (9), (12), (6), без затруднений проходит доказательство устойчивости решения относительно краевых и начальных заданий и термических характеристик среды, данное нами для однослойной задачи в (5).

В заключение заметим, что температуры $u_{ij}(x, t)$ выражаются через v_{ij}^k и u_{ik} квадратурами типа (10*). Так же как в (4) без труда доказывается, что эти квадратуры удовлетворяют всем краевым условиям задачи. Все доказательства проводятся в предположении двукратной непрерывной дифференцируемости функций $f_k(t)$, $\varphi_{ij}(x)$ ($j = 1, 2, \dots, m$; $k = 0, n$; $i = 1, 2, \dots, n$).

Уфимский нефтяной
научно-исследовательский институт

Поступило
25 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Дацев, ДАН, 75, № 5 (1950). ² С. С. Ковнер, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1, № 3 (1937). ³ А. Дацев, ДАН, 55, № 2; 56, №№ 3, 4 (1947).
⁴ Л. И. Рубинштейн, ДАН, 58, № 2 (1947). ⁵ Л. И. Рубинштейн, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 12, № 6 (1948).