Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Д. ВОЛКОВ

ОБОБЩЕННОЕ УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 26 IV 1951)

1. Из условия пластичности [1]

$$\Delta\tau_i \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

следует, что простейшая форма зависимости критических скалывающих напряжений от нормальных напряжений

$$\tau_{s\nu} = \tau_s - \mu\sigma_\nu,$$

предложенная еще Людвиком и Рейто [2], недостаточна для описания экспериментальных неравенств [3]

$$\sigma'_{pp} \leqslant \sigma'_p \leqslant \sigma'_c \leqslant \sigma'_{cc}. \tag{2}$$

Здесь σ'_{pp}, σ'_p, σ'_c, σ'_{cc} — пределы текучести квази-изотропного поликристаллического металла при двухосном равномерном растяжении, одноосном растяжении, одноосном сжатии и двухосном равномерном сжатии.

Действительно, полагая $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{pp} > 0$, $\sigma_3 = 0$ и $\sigma_1 = \sigma_p > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, из уравнения

$$\Delta\tau_{\max} = \Delta\tau_2 = 0$$

находим:

$$\sigma_{pp} = \sigma_p = 2\tau_s\left(-\mu + \sqrt{1 + \mu^2}\right). \tag{3}$$

Полагая затем $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_c < 0$ и $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{cc} < 0$, имеем:

$$\sigma_{cc} = \sigma_c = 2\tau_s\left(\mu + \sqrt{1 + \mu^2}\right). \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем:

$$\sigma_{pp} = \sigma_p \leqslant \sigma_c = \sigma_{cc}. \tag{5}$$

Вследствие того, что крайние неравенства (2) в (5) заменяются равенствами, аналогия с действием сил трения, повидимому, недостаточна для полного описания влияния нормальных напряжений на пластическую деформацию металлов. Критические скалывающие напряжения должны зависеть не только от нормального напряжения, действующего на той же площадке, но также и от среднего гидростатического давления или растяжения. Представим эту зависимость в виде:

$$\tau_{s\nu} = \tau_s - \mu(\sigma_\nu + \lambda\sigma), \tag{6}$$

где

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad \lambda = \text{const}.$$

Пользуясь методом, изложенным ранее ([1]), находим условия пластичности:

$$\Delta\theta_i \leqslant 0 \quad (r = 1,\ 2,\ 3), \tag{7}$$

где

$$\Delta\theta_1 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\mu\tau_s(\sigma_2 + \sigma_3 + 2\lambda\sigma)}{4(1+\mu^2)} -$$

$$- \frac{4\mu^2[\sigma_2\sigma_3 + (\sigma_2+\sigma_3)\lambda\sigma + \lambda^2\sigma^2] + 4\tau_s^2}{4(1+\mu^2)}.$$

Выражения $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$ получаются круговой перестановкой индексов (1, 2, 3).

2. Направляющие косинусы нормалей к площадкам, по которым $\Delta\theta_i$ $(r = 1, 2, 3)$ экстремальны и $t_\nu \neq 0$:

$$l = 0, \quad m = \pm\sqrt{\frac{\sigma_2 - \sigma_3 + \mu[\tau_s - \mu(\sigma_3 + \lambda\sigma)]}{2(1+\mu^2)(\sigma_2 - \sigma_3)}}; \tag{8,1}$$

$$m = 0, \quad n = \pm\sqrt{\frac{\sigma_3 - \sigma_1 + \mu[\tau_s - \mu(\sigma_1 + \lambda\sigma)]}{2(1+\mu^2)(\sigma_3 - \sigma_1)}}; \tag{8,2}$$

$$n = 0, \quad l = \pm\sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_2 + \mu[\tau_s - \mu(\sigma_2 + \lambda\sigma)]}{2(1+\mu^2)(\sigma_1 - \sigma_2)}}. \tag{8,3}$$

Положим $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Тогда $\Delta\theta_{\max} = \Delta\theta_2$. Принимая во внимание, что в направлениях скольжения отношение действующего скалывающего напряжения к критическому максимально, направляющие косинусы нормалей к линиям скольжения при малых упруго-пластических деформациях получим из (8,2). Только в частном случае, когда $\mu = 0$, направления скольжения ортогональны и совпадают с направлениями $t_{\max}$. В общем случае направления скольжения находятся в плоскости главных направлений (1, 3) и отклоняются от направлений $t_{\max}$ в сторону оси 3 на „угол действия" ([2]).

Вследствие того, что μ увеличивается при термической обработке конструкционных сталей на более высокую прочность ([1]), несовпадение линий скольжения с траекториями $t_{\max}$ является характерным свойством высокопрочных сталей и сплавов.

3. Полагая в (7) $\lambda = 0$, получим условие (1). Если $\mu > 0$, $\lambda > 0$ — малые величины, то направления скольжения приблизительно совпадают с направлениями $t_{\max}$: $m = 0$, $l = n = \pm\sqrt{2}/2$. Условие касания систем τ_ν и $\tau_{s\nu}$ получим в виде:

$$t_{\max} = \tau_{s\nu}. \tag{9}$$

Из (6) и (9) находим:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s - \mu(\sigma_1 + \sigma_3) - 2\mu\lambda\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \tag{10}$$

При $\mu = 0$ из (10) получается условие пластичности Сен-Венана. При $\lambda = 0$ получаем условие пластичности Кулона ([3]) (Геста — Мора ([4])). В общем случае (10) является сочетанием условий пластичности Кулона и Занделя ([3, 4]). Следовательно, (7) является дальнейшим обобщением перечисленных условий пластичности, учитывающим возможность несовпадения траекторий скольжения с траекториями $t_{\max}$.

4. Пределы упругости при простейших напряженных состояниях получаются из уравнения

$$\Delta\theta_{\max} = 0. \tag{11}$$

Из (11) находим:

$$\sigma_{pp} = 2\tau_s \frac{-\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right)\mu + \sqrt{1+\mu^2}}{1-\frac{8}{3}\lambda\mu^2\left(1+\frac{2}{3}\lambda\right)}; \tag{12}$$

$$\sigma_{p} = 2\tau_s \frac{-\left(1+\frac{2}{3}\lambda\right)\mu + \sqrt{1+\mu^2}}{1-\frac{4}{3}\lambda\mu^2\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)}; \tag{13}$$

$$\sigma_k = \frac{\tau_s}{\sqrt{1+\mu^2}}; \tag{14}$$

$$\sigma_{c} = 2\tau_s \frac{\left(1+\frac{2}{3}\lambda\right)\mu + \sqrt{1+\mu^2}}{1-\frac{4}{3}\lambda\mu^2\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)}; \tag{15}$$

$$\sigma_{cc} = 2\tau_s \frac{\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right)\mu + \sqrt{1+\mu^2}}{1-\frac{8}{3}\lambda\mu^2\left(1+\frac{2}{3}\lambda\right)}. \tag{16}$$

Здесь σ_k — предел упругости при чистом сдвиге: $\sigma_1 = \sigma_k > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_k$. Величины (12)—(16) удовлетворяют неравенствам (2):

$$\sigma_{pp} \leqslant \sigma_p \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_{cc}. \tag{17}$$

Из (17) непосредственно видно, что по мере того как главные напряжения становятся растягивающими, предел упругости поликристалла убывает.

5. Прочность большинства элементов конструкций современных машин и механизмов ограничена прочностью участков концентрации напряжений (галтелей, выточек и т. п.), в пределах которых зачастую имеет место неравноосное растяжение ([5]). Для наиболее ответственных деталей машин, с другой стороны, применяются стали и сплавы, термически обработанные на высокую прочность. Такие материалы более подвержены влиянию нормальных напряжений, следовательно, в местах концентрации напряжений следует ожидать понижения предела упругости в сравнении с тем, который был определен при испытаниях на разрыв и принят в качестве расчетного. Но это значит, что действительный запас прочности детали должен быть меньше расчетного. В связи с этим необходимо ввести коррективы в известные условия для „прочного состояния" металла ([5]):

$$t_{\max} < \tau_s, \qquad \sigma_1 < R_\sigma, \tag{18}$$

где R_σ — сопротивление разрушению от отрыва; $\tau_s = \sigma_k$ (при $\mu = 0$) — сопротивление сдвигу.

Имея в виду применения не только к пластичным, но также и к более хрупким, высокопрочным металлам, неравенства (18) записываем в более общем виде:

$$\Delta\theta_{\max} < 0, \qquad \sigma_1 < R_\sigma. \tag{19}$$

В частном случае, когда $\mu = 0$, условие (19) совпадает с (18).

6. Для того чтобы практически пользоваться условиями пластичности (7) и прочности (19), необходимо экспериментально определить постоянные металла τ_s, μ, λ. Если $\lambda \neq 0$, то эти постоянные нельзя определить из испытаний на одноосное растяжение, чистый сдвиг и одноосное сжатие, так как уравнения (13), (14) и (15) не являются независимыми. Поэтому для определения постоянных металла необходимо наряду с обычными испытаниями на разрыв, сжатие и кручение производить испытания при сложных напряженных состояниях. Последние приобретают особенно важное значение для высокопрочных сталей и сплавов.

Поступило
20 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Волков, ДАН, **76**, № 3, 371 (1951). [2] В. Д. Кузнецов, Физика твердого тела, **2**, 1941. [3] Теория пластичности, сборн. статей под ред. Ю. Н. Работнова, 1948. [4] М. М. Саверин, Контактная прочность материала в условиях одновременного действия нормальной и касательной нагрузок, 1946. [5] Г. В. Ужик, Сопротивление отрыву и прочность металлов, 1950.