Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Л. ЭДЕЛЬМАН

О p-НОРМАЛЬНЫХ РЯДАХ ГРУППЫ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 3 V 1951)

В связи с изучением свойств групп, связанных с определенным множеством Π простых чисел, так называемых Π-свойств, и, в частности, p-свойств (т. е. когда множество Π сводится только к одному простому числу p), С. А. Чунихиным в работах [3-5], в результате отказа от симметрии по отношению ко всем простым числам, введены понятия о p-абелевых группах, о p-коммутанте группы, о p-разрешимой группе, о p-специальной группе, являющиеся обобщением соответствующих обычных понятий абелевой группы, коммутанта группы, разрешимой группы, специальной группы.

В настоящей статье дается продолжение этого ряда обобщений и вводится понятие о p-нормальном делителе и о p-нормальном ряде, которому ставится в соответствие ряд определенным способом построенных фактор-групп. Для особого класса групп, удовлетворяющих так называемому δ-условию, доказано предложение относительно p-нормальных рядов, аналогичное теореме Шрейера об обычных нормальных рядах. Далее, автором получены результаты, относящиеся к p-разрешимым группам, аналогичные результатам О. Ю. Шмидта о разрешимых группах [2], и с помощью введения понятия о классах p-сопряженных элементов группы построен пример мультигруппы, которую удалось использовать для получения предложений, аналогичных предложениям А. П. Дицмана [6].

Определение 1. Элементы группы $\mathfrak{G}$, порядками которых являются степени некоторого простого числа p, будем называть *p-элементами* группы. Единицу группы также будем относить к p-элементам, так как ее порядком можно считать нулевую степень числа p.

Определение 2. Подгруппу $\mathfrak{G}^p$ группы $\mathfrak{G}$, порожденную всеми ее p-элементами, будем называть *p-порожденной* подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}^p$ будет характеристической подгруппой группы $\mathfrak{G}$, так как всякий элемент группы $\mathfrak{G}$, равнотипный с p-элементом, будет также p-элементом. Если в $\mathfrak{G}$ не содержится p-элементов, отличных от единичного элемента, то подгруппа $\mathfrak{G}^p$ будет совпадать с единичной группой.

Определение 3. Подгруппу $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$, перестановочную со всеми p-элементами группы $\mathfrak{G}$, будем называть *p-нормальным делителем* или *p-инвариантной подгруппой* группы $\mathfrak{G}$. Очевидно, что p-нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ перестановочен со всеми элементами $\mathfrak{G}^p$. И обратно, всякая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, перестановочная со всеми элементами $\mathfrak{G}^p$, будет p-нормальным делителем $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}^p = \mathfrak{E}$, то всякая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ будет в ней p-инвариантной подгруппой.

Определение 4. Группу $\mathfrak{G}$ называем *p*-абелевой, если каждый ее *p*-элемент перестановочен с элементами порядка, взаимно-простого с p [3]. Так как единичный элемент группы $\mathfrak{G}$ можно рассматривать, с одной стороны, как имеющий порядок, равный нулевой степени p, а с другой стороны, как имеющий порядок, не делящийся на p, то всякая группа $\mathfrak{G}$, содержащая только p-элементы (p-группа), а также группа, не содержащая p-элементов, будут p-абелевыми. Такие группы называем тривиально p-абелевыми. В p-абелевой группе каждая подгруппа, содержащая только элементы порядков взаимно-простых с p, будет ее p-нормальным делителем.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H}$ — p-нормальные делители $\mathfrak{G}$, то и их пересечения и подгруппа, ими порожденная, также будут являться p-нормальными делителями группы $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Проводится так же, как и для обыкновенных нормальных делителей [1]. Если $\mathfrak{G}^p$ — p-порожденная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{N}$ — какой-нибудь p-нормальный делитель $\mathfrak{G}$, то, в силу определения 3, $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}$ является некоторой подгруппой группы $\mathfrak{G}$, нормальным делителем которой будет $\mathfrak{N}$. Фактор-группу $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ будем называть p-фактор-группой группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе $\mathfrak{N}$.

Если представить элементы группы $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ в виде $\mathfrak{N}, A_1\mathfrak{N}, A_2\mathfrak{N}, \ldots$, где $A_i \in \mathfrak{G}^p$, то $A_i = AB\ldots M$ ($A, B, \ldots, M$ — p-элементы) и $A_i\mathfrak{N} = A\mathfrak{N}B\mathfrak{N}\ldots M\mathfrak{N}$. Но $A\mathfrak{N}, B\mathfrak{N}, \ldots, M\mathfrak{N}$ являются p-элементами. Отсюда следует, что группа $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ совпадает со своей p-порожденной подгруппой и что всякий ее p-нормальный делитель будет ее нормальным делителем.

Теорема 2. *Если некоторая p-фактор-группа $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель $\overline{\mathfrak{H}}$, состоящий из систем $\mathfrak{N}, A_1\mathfrak{N}, A_2\mathfrak{N}, \ldots$ (где $A_1, A_2, \ldots$ являются элементами $\mathfrak{G}^p$), то объединение этих смежных классов $\mathfrak{H} = \mathfrak{N} + A_1\mathfrak{N} + A_2\mathfrak{N} + \cdots$ будет p-нормальным делителем $\mathfrak{G}$, заключающим $\mathfrak{N}$. И наоборот, всякому p-нормальному делителю $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$, заключающему $\mathfrak{N}$, соответствует нормальный делитель $\mathfrak{H}^p\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Докажем, что $\mathfrak{H}$ является p-нормальным делителем $\mathfrak{G}$. Как известно, $\mathfrak{H}$ является нормальным делителем $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}$, заключающим $\mathfrak{N}$, а поэтому $\mathfrak{H}$ перестановочна со всеми элементами $\mathfrak{G}^p$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ есть p-нормальный делитель $\mathfrak{G}$. Если, обратно, $\mathfrak{H}$ является p-нормальным делителем $\mathfrak{G}$, содержащим $\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{H}$ инвариантна в $\mathfrak{G}^p\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}^p$ — характеристическая подгруппа $\mathfrak{H}$; следовательно, $\mathfrak{H}^p$ инвариантна в $\mathfrak{G}^p\mathfrak{H}$, но так как $\mathfrak{H}^p \subseteq \mathfrak{G}^p$, то $\mathfrak{H}^p$ инвариантна в $\mathfrak{G}^p$. Кроме того, $\mathfrak{H}^p$ перестановочна со всеми элементами $\mathfrak{N}$. Поэтому $\mathfrak{H}^p\mathfrak{N}$ будет нормальным делителем в $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}$, а потому фактор-группа $\mathfrak{H}^p\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ будет, как известно, нормальным делителем фактор-группы $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$.

Определение 5. Конечную систему вложенных друг в друга подгрупп группы $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \supset \mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_l = \mathfrak{E} \tag{1}$$

будем называть p-нормальным рядом группы $\mathfrak{G}$, если всякая группа $\mathfrak{N}_i$ является истинным p-нормальным делителем $\mathfrak{N}_{i-1}$.

Пример. Обозначим через $\mathfrak{P}$ циклическую группу 25-го порядка, через $\mathfrak{P}'$ — ее подгруппу 5-го порядка, через $\mathfrak{Q}$ — нециклическую группу 6-го порядка и через $\mathfrak{D}$ — ее подгруппу 2-го порядка. Можно образовать из прямых произведений этих групп такие p-нормальные ряды ($p=5$), которые отличны от нормальных рядов

$$\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \supset \mathfrak{P} \times \mathfrak{D} \supset \mathfrak{E} \tag{2}$$

или

$$\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \supset \mathfrak{P}' \times \mathfrak{D} \supset \mathfrak{E}. \tag{3}$$

Если для p-нормального ряда (1) образовать p-фактор-группы $\mathfrak{G}^p\mathfrak{N}_1 / \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_1{}^p\mathfrak{N}_2 / \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_{l-1}^p \mathfrak{N}_l / \mathfrak{N}_l$, то будем их называть факторами p-нормального ряда (1), их порядки — индексами p-нормального ряда. Далее, обычным образом определяются понятия уплотнения и изоморфизма p-нормальных рядов.

Определение 6. Если группа $\mathfrak{G}$ такова, что для всяких ее подгрупп $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{H}$ выполняется условие $\mathfrak{N}^p \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^p$, то о группе $\mathfrak{G}$ будем говорить, что она удовлетворяет δ-условию. Очевидно, что p-группы, а также группы, не содержащие p-элементов, удовлетворяют δ-условию. Но, кроме этих тривиальных примеров групп, удовлетворяющих δ-условию, и так называемые p-разложимые группы, как будет доказано ниже, также удовлетворяют δ-условию.

Определение 7. Группа $\mathfrak{G}$ порядка, делящегося на p, называется p-разложимой, если она разлагается в прямое произведение двух множителей так, что один из этих множителей будет p-силовской подгруппой $\mathfrak{G}$ ([5]).

Докажем теперь, что p-разложимая группа удовлетворяет δ-условию. В силу определения, для p-разложимой группы $\mathfrak{G}$ будем иметь $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{Q}$, где $\mathfrak{P}$ является p-силовской подгруппой $\mathfrak{G}$.

Как доказано в ([5]), всякая подгруппа p-разложимой группы сама будет p-разложимой, а потому для подгрупп $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ будем иметь $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{Q}_2$, где $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ — p-силовские подгруппы групп $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H}$, соответственно, причем $\mathfrak{P}_1 \supseteq \mathfrak{P}_2$. Ясно, что $\mathfrak{N}^p = \mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{H}^p = \mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{N}^p \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{H}^p$, т. е. группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет δ-условию.

На p-нормальные ряды группы, удовлетворяющей δ-условию, можно распространить теорему Шрайера, но только относительно изоморфизма их p-фактор-групп.

Теорема 3. *Всякие два p-нормальных ряда группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей δ-условию, обладают изоморфными уплотнениями.*

Доказательство. Пусть заданы p-нормальные ряды группы $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \supset \mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_k = \mathfrak{E}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_0 \supset \mathfrak{H}_1 \supset \mathfrak{H}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{H}_l = \mathfrak{E}. \tag{5}$$

Для рядов (4) и (5) образуем соответствующие им ряды из p-порожденных подгрупп групп, входящих в ряды (4) и (5):

$$\mathfrak{G}^p = \mathfrak{N}_0^p \supset \mathfrak{N}_1^p \supset \mathfrak{N}_2^p \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_k^p = \mathfrak{E}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{G}^p = \mathfrak{H}_0^p \supset \mathfrak{H}_1^p \supset \mathfrak{H}_2^p \supset \cdots \supset \mathfrak{H}_l^p = \mathfrak{E}. \tag{7}$$

Ряды (6) и (7) являются обычными нормальными рядами. Назовем их p-порождениями, соответственно, рядов (4) и (5).

Докажем, что p-фактор-группы ряда (4) изоморфны соответствующим фактор-группам ряда (6). Действительно, в силу теоремы об изоморфизме, имеем:

$$\mathfrak{N}_{i-1}^p \mathfrak{N}_i / \mathfrak{N}_i \simeq \mathfrak{N}_{i-1}^p / \mathfrak{N}_{i-1}^p \cap \mathfrak{N}_i. \tag{8}$$

Так как группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет δ-условию, то $\mathfrak{N}_{i-1}^p \cap \mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_i^p$, и поэтому из (8) следует $\mathfrak{N}_{i-1}^p \mathfrak{N}_i / \mathfrak{N}_i \simeq \mathfrak{N}_{i-1}^p / \mathfrak{N}_i^p$. Таким же образом p-фактор-группы ряда (5) изоморфны соответствующим фактор-группам ряда (7).

Если вставить между двумя любыми членами $\mathfrak{N}_{i-1}^p$ и $\mathfrak{N}_i^p$ ряда (6) какой-нибудь нормальный делитель $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{N}_{i-1}^p$

$$\mathfrak{N}_0^p \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_{i-1}^p \supset \mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_i^p \supset \cdots \supset \mathfrak{E}, \tag{9}$$

то и между членами $\mathfrak{N}_{i-1}$ и $\mathfrak{N}_i$ ряда (4) можно будет вставить p-нормальный делитель $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_i$ группы $\mathfrak{N}_{i-1}$

$$\mathfrak{N}_0 \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_{i-1} \supset \mathfrak{N}\mathfrak{N}_i \supset \mathfrak{N}_i \supset \cdots \supset \mathfrak{E}. \tag{10}$$

Покажем, что при этом ряд (9) будет p-порождением ряда (10). Действительно, так как $\mathfrak{G}$ удовлетворяет δ-условию, то

$$(\mathfrak{N}\mathfrak{N}_i)^p = \mathfrak{N}_{i-1}^p \cap \mathfrak{N}\mathfrak{N}_i. \tag{11}$$

Если взять какой-нибудь элемент $NN_i \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_i$, где $N \in \mathfrak{N}$, $N_i \in \mathfrak{N}_i$, и если $NN_i \in \mathfrak{N}_{i-1}^p$, то $N_i \in N^{-1}\mathfrak{N}_{i-1}^p = \mathfrak{N}_{i-1}^p$, ибо $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_{i-1}^p$. Таким образом, $N_i \in \mathfrak{N}_{i-1}^p \cap \mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_i^p$. А так как $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_i^p$, то $NN_i \in \mathfrak{N}$, и поэтому $\mathfrak{N}_{i-1}^p \cap \mathfrak{N}\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}$. Но вместе с тем $\mathfrak{N}_{i-1}^p \cap \mathfrak{N}\mathfrak{N}_i \supset \mathfrak{N}$, следовательно, из (11) получим, что $(\mathfrak{N}\mathfrak{N}_i)^p = \mathfrak{N}$; p-порождение ряда (10) будет рядом (9).

Построенные нами уплотнения (9) и (10) рядов (6) и (4) будем называть p-уплотнениями. Нормальные ряды (6) и (7), в силу теоремы Шрайера, обладают изоморфными уплотнениями

$$\mathfrak{G}^p \supset \mathfrak{N}_0^p \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_1^p \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_k^p = \mathfrak{E}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{G}^p \supset \mathfrak{H}_0^p \supset \cdots \supset \mathfrak{H}_1^p \supset \cdots \supset \mathfrak{H}_l^p = \mathfrak{E}. \tag{13}$$

Построим соответствующие им p-уплотнения рядов (4) и (5):

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_0 \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{N}_k = \mathfrak{E}, \tag{14}$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_0 \supset \cdots \supset \mathfrak{H}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{H}_l = \mathfrak{E}. \tag{15}$$

При этом, как мы видели раньше, p-фактор-группы рядов (14) и (15) изоморфны соответствующим фактор-группам рядов (12) и (13) соответственно, и поэтому p-нормальные ряды (14) и (15) будут изоморфны. Теорема доказана.

Пример. Для нормальных рядов (2) и (3) группы $\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q}$ можно образовать такие уплотнения:

$$\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \supset \mathfrak{P} \times \mathfrak{D} \supset \mathfrak{P}' \times \mathfrak{D} \supset \mathfrak{E}, \tag{16}$$

$$\mathfrak{P} \times \mathfrak{Q} \supset \mathfrak{P}' \times \mathfrak{Q} \supset \mathfrak{P}' \times \mathfrak{D} \supset \mathfrak{E}. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что p-нормальные ряды (16) и (17) изоморфны.

Красноярский государственный
педагогический и учительский институт

Поступило
20 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Ю. Шмидт, Абстрактная теория групп, 2-е изд., М., 1933. [2] О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., 17/5 : 2 (1946). [3] С. А. Чунихин, ДАН, 55, № 6 (1947). [4] С. А. Чунихин, ДАН, 58, № 7 (1947). [5] И. К. Чунихина и С. А. Чунихин, Матем. сборн., 15/57 : 2 (1944). [6] А. П. Дицман, ДАН, 49, № 5 (1945).