Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

А. А. ШЕСТАКОВ

О ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ СИСТЕМЫ n ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ($n \geqslant 3$) ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 IV 1951)

Рассмотрим нормальную систему n уравнений ($n \geqslant 3$) первого порядка

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

правые части X_s которой не зависят явно от t. Пусть функции $X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ голоморфны в окрестности изолированной особой точки $O(0, 0, \ldots, 0)$ и имеют следующие разложения в ряды Тейлора

$$X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha} \alpha_{s\alpha} x_1^{\alpha_{s1}} x_2^{\alpha_{s2}} \cdots x_n^{\alpha_{sn}} \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где суммирование в (2) распространено на все целые числа $\alpha_{sj} > 0$.

В заметке автора [1] доказано, что если разложения (2) начинаются с членов одной и той же степени, то система (1) в общем случае может иметь лишь конечное число критических направлений *, причем это число не ограничено сверху в классе дифференциальных уравнений (1) с голоморфными правыми частями.

Размерность семейства интегральных кривых, входящих в O вдоль данного критического направления, определяется характеристическим уравнением, соответствующим данному направлению [1].

В случае, когда начальные члены разложений (2) имеют разную степень, мы в настоящей заметке: 1) показываем, что при некоторых ограничениях на систему (1) последняя не может иметь более одного критического направления; 2) изучаем касание между интегральными кривыми высшего порядка, сравнивая интегральные кривые с параболами, и устанавливаем размерность входящих в O интегральных кривых.

В n-мерном пространстве декартовых координат рассмотрим n классов K_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ точек $(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{s,s-1}, a_{ss} - 1, a_{s,s+1}, \ldots, a_{sn})$, соответствующих всем отличным от нуля коэффициентам $a_{s\alpha}$ в разложении (2).

Точки K_s лежат внутри (или на гранях) n-мерного угла, образованного n плоскостями-квадрантами, имеющего вершину в точке $K(-1, -1, \ldots, -1)$. Эти плоскости-квадранты определяются соотно-

---

* Направления, по которым в O могут входить интегральные кривые, назовем критическими.

шениями: $x_i = -1$, $x_j \geqslant -1$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$). Пусть существует $(n-1)$-мерная плоскость

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n - A = 0 \quad (A > 0), \tag{3}$$

которая пересекает все n ребер n-мерного угла и определяет с гранями $(n+1)$-мерный многогранник, внутри которого нет точек K_s, но на плоскости (3) лежит по крайней мере одна точка из каждого класса K_s *. Координаты этих точек будем обозначать буквой β, а координаты всех других точек буквой γ.

Легко видеть, что вершина K угла и точки K_s лежат по разные стороны плоскости (3).

В качестве координат A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) нормального к плоскости (3) вектора $P(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ возьмем n взаимно-простых целых положительных чисел p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Тогда будем иметь следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n} (\beta_{ik} - \delta_{ik}) p_k = A, \quad \sum_{k=1}^{n} (\gamma_{ik} - \delta_{ik}) p_k > A \tag{4}$$

($i = 1, 2, \ldots, n$; δ_{ik} — символ Кронекера).

Рассмотрим систему алгебраических уравнений относительно x_s

$$\frac{p_1 x_1}{\varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{p_2 x_2}{\varphi_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{p_n x_n}{\varphi_n (x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{5}$$

где функции $\varphi_s (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) определены формулами:

$$\varphi_s (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\beta} a_{s\beta} x_1^{\beta_{s1}} x_2^{\beta_{s2}} \cdots x_n^{\beta_{sn}} \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Предположим, что система (5) имеет вещественные корни, которые мы в дальнейшем будем обозначать через $x_s = a_s^{(k)}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, l$). Кроме того, полагаем $\varphi_s (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}) \neq 0$ ($s = 1, 2, \ldots, n$).

Определение 1. Параболы уравнения которых $x_s = a_s^{(k)} t^{p_s}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, l$), назовем критическими параболами.

Параметрические уравнения критических парабол удовлетворяют системе (5). Поэтому требование, чтобы система (5) имела вещественные корни, является необходимым условием для существования критических парабол, вдоль которых, как увидим ниже, входят в O интегральные кривые. Заметим, что система (1) может иметь лишь конечное число критических парабол.

Определение 2 **. Если при достаточно малых t ($t \geqslant 0$) интегральная кривая лежит под параболой *** $x_i = t^{c_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) для всех

---

* Случай существования плоскости (3) с перечисленными свойствами является общим случаем.

** В определениях 2 и 3 и всюду в дальнейшем принимаем за независимое переменное x_1.

*** Будем говорить, что парабола $x_i^{(1)} = t^{c_i^{(1)}}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) лежит выше (ниже) параболы $x_i^{(2)} = t^{c_i^{(2)}}$, если для всех достаточно малых t имеют место неравенства: $x_1^{(1)} = x_1^{(2)}$, $x_i^{(1)} > x_i^{(2)}$, $i = 2, 3, \ldots, n$ ($x_1^{(1)} = x_1^{(2)}$, $x_i^{(1)} < x_i^{(2)}$, $i = 2, 3, \ldots, n$).

$c_1=c_1^0$, $c_i<c_i^0$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ и выше каждой параболы $x_i=t^{c_i}$ для всех $c_1=c_1^0$, $c_i>c_i^0$ $(i=2, 3, \ldots, n)$, то скажем, что совокупность n чисел $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$ есть порядок кривизны интегральной кривой [2].

Определение 3. Данная интегральная кривая порядка кривизны $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$ имеет меру кривизны $(m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0)$, если при достаточно малых t она лежит под всеми параболами $x_i=m_i t^{c_i^0}$ при $m_1=m_1^0$, $m_i>m_i^0$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ и над всеми параболами $x_i=m_i t^{c_i^0}$ при $m_1=m_1^0$, $m_i<m_i^0$ $(i=2, 3, \ldots, n)$.

Определение 4. Ведущей координатой назовем ту координату x_s, которая соответствует наименьшему числу p_s. Если одинаковых наименьших p_s несколько, то будем говорить о группе ведущих координат. Плоскость, определяемую ведущими координатами, назовем ведущей.

Нетрудно видеть, что все критические параболы касаются в O ведущей плоскости. В частности, если ведущая координата одна, то все параболы касаются соответствующей координатной оси (ведущая ось).

Определим $(n-1)^2$ чисел $p_{ij}^{(k)}$ $(i, j=1, 2, \ldots, n-1;\ k=1, 2, \ldots, l)$ при помощи следующих формул:

$$p_{ij}^{(k)}=p_1\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{i+1} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_{j+1}} & \dfrac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial\varphi_{j+1}} \end{vmatrix}-\delta_{ij}p_i, \tag{6}$$

где знак $a_i^{(k)}$ при определителях (6) означает, что функции вычислены при значении одного из корней $x_i=a_i^{(k)}$ системы (5).

Определение 5. Уравнение $(n-1)$-й степени относительно λ

$$\Delta_k(\lambda)=|p_{ij}^{(k)}-\delta_{ij}\lambda|=0 \quad (k=1, 2, \ldots, l) \tag{7}$$

назовем характеристическим уравнением системы (1), соответствующим критической параболе $x_i=a_i^{(k)}t^{p_i}$ $(i=$ $=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, l)$.

Каждой критической параболе соответствует свое характеристическое уравнение. В указанных выше предположениях имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть характеристическое уравнение системы* (1), *соответствующее критической параболе* $x_i=a_i^{(k)}t^{p_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, *имеет* $q-1$ *корней с положительной вещественной частью. Тогда, каковы бы ни были другие корни, система* (1) *имеет два семейства О-кривых* * *одной и той же размерности* q, *входящих в* O *вдоль данной критической параболы, соответственно, при* $t\to+0$ *и* $t\to-0$, *при этом все критические параболы касаются в* O *ведущей плоскости или ведущей оси.*

Доказательство. Перейдем в системе (1) к новым переменным z_i согласно соотношениям:

$$z_{i-1}t^{p_i}=x_i-a_i^{(k)}t^{p_i} \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

---

* Если интегральная кривая $x_s=x_s(t)$ при $t\to+\infty$ или $t\to-\infty$ приближается к O, то назовем ее O-кривой.

где z_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ являются функциями параметра t, имеющими при $t=0$ значения, равные нулю: $z_i(0) = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, а $x_i = a_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — один из корней системы (5).

Так как переменное x_1 является независимым, то $a_1 = 0$, $z_0 = 0$, $x_1 = t^{p_1}$. Тогда из (4) и (8) после алгебраических преобразований получаем систему вида:

$$t\frac{dz_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} p_{si} z_i + p_{sn} t + Z_s(t, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1), \quad (9)$$

где коэффициенты p_{si} определены формулами (6) и Z_s $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ — голоморфные в окрестности точки $t = 0$, $z_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ функции, разложения которых в этой окрестности начинаются с членов степени $\geqslant 2$.

Всякой O-кривой системы (9) соответствует O-кривая системы (1), входящая в O вдоль критической параболы $x_i = a_i t^{p_i}$ и обратно.

Характеристическое уравнение системы (1), соответствующее критической параболе $x_i = a_i t^{p_i}$, является для системы (9) «укороченным» характеристическим уравнением ([3]), откуда и следует утверждение теоремы.

Все O-кривые системы (1), входящие в O вдоль одной и той же критической параболы, мы отнесем к одному и тому же классу O-кривых.

Доказанная теорема утверждает, что существует конечное число классов O-кривых, касающихся в O ведущей плоскости, причем эти классы имеют один и тот же порядок кривизны $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ интегральных кривых, отличаясь друг от друга различными мерами кривизны $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Число классов O-кривых равно числу различных корней системы (5).

Размерность каждого класса определяется корнями характеристического уравнения (7), соответствующего критической параболе, вдоль которой в O входят интегральные кривые данного класса.

Наконец, сделаем замечание к работе автора ([1]), где в определении характеристического уравнения надо добавить, что оно соответствует рассматриваемому критическому направлению и, следовательно, доказанная там теорема говорит о существовании семейств O-кривых, входящих в O вдоль рассматриваемого критического направления. Что касается следствия теоремы, то оно является правильным лишь при дополнительных ограничениях на правые части системы.

Электро-механический институт
инженеров железнодорожного транспорта
им. Ф. Э. Дзержинского

Поступило
14 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Шестаков, ДАН, 65, № 2 (1949). [2] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949, стр. 99. [3] А. А. Шестаков, ДАН, 62, № 2 (1948).