

Ф. И. ХАРШИЛАДЗЕ

О ФУНКЦИЯХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВТОРЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 V 1951)

1. Вещественную функцию $f(x)$, определенную и конечную для всех значений независимой переменной x из сегмента $[a, b]$, мы называем функцией с ограниченным m -изменением, если для любого подразделения сегмента $[a, b]$ на части $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \Delta_{x_k}^{x_{k+1}} f \right|$$

не превосходит некоторого числа V_m . Здесь $\Delta_{x_k}^{x_{k+1}} f$ есть разность порядка m функции $f(x)$ по сегменту $[x_k, x_{k+1}]$. При этом разности различных порядков определяются по индукции:

$$\Delta_{x_k}^{x_{k+1}} f = f(x_{k+1}) - f(x_k),$$

$$\Delta_{x_k}^{x_{k+1}} f = \Delta_{y_k}^{x_{k+1}} f - \Delta_{x_k}^{y_k} f = f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(y_k)$$

и вообще

$$\Delta_{x_k}^{x_{k+1}} f = \Delta_{y_k}^{x_{k+1}} f - \Delta_{x_k}^{y_k} f,$$

где $y_k = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}$.

Функции с ограниченным первым изменением совпадают с функциями с ограниченным изменением в обычном смысле. Легко видеть, что функция с ограниченным $m-1$ -изменением является также функцией с ограниченным m -изменением. Чтобы убедиться в том, что обратное утверждение неверно, достаточно заметить, что класс функций с ограниченным вторым изменением содержит в себе функции, удовлетворяющие равномерно на $[a, b]$ неравенству

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq Mh.$$

Зигмунд (1), впервые рассмотревший такого рода функции, показал, что существует функция, удовлетворяющая этому условию и не дифференцируемая ни в одной точке. Очевидно, такая функция не мо-

жет иметь ограниченное изменение в обычном смысле. Нижеприведенные результаты сформулированы для функций с ограниченным вторым изменением, хотя читатель легко заметит, что они справедливы и для функций более общей природы, определенных выше. Прежде всего, можно доказать, что измеримая функция с ограниченным вторым изменением ограничена. Кроме того, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют ограниченное второе изменение, то $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ при любых вещественных c_1 и c_2 имеет ограниченное второе изменение.

2. Многие предложения теории рядов Фурье, относящиеся к функциям с ограниченным изменением, остаются справедливыми и для функций с ограниченным вторым изменением. Мы приведем здесь несколько таких предложений.

Теорема 1. Если $f(x)$ — измеримая периодическая функция периода 2π с ограниченным вторым изменением на сегменте $[0, 2\pi]$, то ее коэффициенты Фурье a_n и b_n удовлетворяют соотношению

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

Так как приложения функций с ограниченным вторым изменением в теории рядов Фурье существенно опираются на эту теорему, то мы приведем ее подробное доказательство.

Пусть

$$V_2 = \sup \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} \Delta^2 f \right|,$$

где \sup распространяется на всевозможные подразделения сегмента $[0, 2\pi]$ на части $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = 2\pi$. Согласно условию теоремы, $V_2 < \infty$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = - \int_0^{2\pi} f(x) \cos n \left(x + \frac{\pi}{n} \right) dx = \\ &= - \int_0^{2\pi} f \left(x - \frac{\pi}{n} \right) \cos nx \, dx. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\pi a_n = - \int_0^{2\pi} f \left(x + \frac{\pi}{n} \right) \cos nx \, dx,$$

так что

$$\begin{aligned} -4\pi a_n &= \int_0^{2\pi} \left\{ f \left(x + \frac{\pi}{n} \right) + f \left(x - \frac{\pi}{n} \right) - 2f(x) \right\} \cos nx \, dx = \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{k+1}{n}\pi} \left\{ f \left(x + \frac{\pi}{n} \right) + f \left(x - \frac{\pi}{n} \right) - 2f(x) \right\} \cos nx \, dx. \end{aligned}$$

Но

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{k+1}{n}\pi} \left\{ f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + f\left(x - \frac{\pi}{n}\right) - 2f(x) \right\} \cos nx \, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ f\left(t + \frac{k+1}{n}\pi\right) + f\left(t + \frac{k-1}{n}\pi\right) - 2f\left(t + \frac{k\pi}{n}\right) \right\} (-1)^k \cos nt \, dt,$$

и поэтому

$$-4\pi a_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \cos nt \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \left\{ f\left(t + \frac{k+1}{n}\pi\right) + f\left(t + \frac{k-1}{n}\pi\right) - 2f\left(t + \frac{k\pi}{n}\right) \right\} dt,$$

стало быть,

$$4\pi |a_n| \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left\{ \sum_{k=0}^{2n-1} \left| f\left(t + \frac{k+1}{n}\pi\right) + f\left(t + \frac{k-1}{n}\pi\right) - 2f\left(t + \frac{k\pi}{n}\right) \right| \right\} dt \leq$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} 2(V_2 + 4M) dt = 2(V_2 + 4M) \frac{\pi}{n}, \quad M = \sup |f(x)|,$$

т. е.

$$|a_n| \leq \frac{V_2 + 4M}{2n}.$$

Совершенно так же можно доказать, что

$$|b_n| \leq \frac{V_2 + 4M}{2n},$$

и соотношения (1) установлены.

Так как, по известной теореме Харди — Ландау, из суммируемости ряда Фурье методом Чезаре при условиях (1) вытекает сходимость, то, вспоминая известную теорему Фейера, мы приходим к следующей теореме, являющейся обобщением классической теоремы Жордана.

Теорема 2. Если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с ограниченным вторым изменением на сегменте $[0, 2\pi]$, то ее ряд Фурье сходится равномерно.

Аналогичным рассуждением доказывается теорема 3.

Теорема 3. Если $f(x)$ — произвольная измеримая функция с ограниченным вторым изменением на сегменте $[0, 2\pi]$, то частные суммы ее ряда Фурье равномерно ограничены.

Следующая теорема является обобщением известной теоремы Зигмунда (2) об абсолютной сходимости ряда Фурье.

Теорема 4. Если периодическая функция $f(x)$ такова, что при всех x и h

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq Mh^\alpha \text{ при } \alpha > 0,$$

и, кроме того, $f(x)$ имеет ограниченное второе изменение на сегменте $[0, 2\pi]$, то ее ряд Фурье абсолютно сходится.

Доказательство аналогично доказательству теоремы Зигмунда.

3. Обозначим через \bar{V}_2 класс функций с ограниченным вторым изменением, имеющих лишь разрывы первого рода. Можно указать необходимое и достаточное условие непрерывности функций этого класса, выраженное в коэффициентах Фурье. Именно, имеет место следующая теорема, аналогичная теореме Винера.

Теорема 5. Для того чтобы функция $f(x)$ класса \bar{V}_2 была непрерывна, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \rho_k, \quad (2)$$

где $\rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

Исходя из этого результата, можно прийти к обобщению теоремы, доказанной недавно С. М. Лозинским ⁽³⁾.

Теорема 6. Для того чтобы функция $f(x)$ класса \bar{V}_2 была непрерывна, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=1}^n \rho_k = o(\log n). \quad (3)$$

Пример, приведенный в работе С. М. Лозинского ⁽³⁾, пригоден для доказательства того, что условия (3) и (2) в общем случае неравносильны даже при выполнении условия (1). Точнее говоря, существует последовательность чисел $\{\rho_k\}$, удовлетворяющая условиям (1) и (3), но не удовлетворяющая условию (2).

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
17 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ A. Zygmund, Duke Math. Journ., 12, No. 1, 47 (1945). ² A. Zygmund, Proc. London Math. Soc., 3, 194 (1928). ³ С. Лозинский, ДАН, 49, № 8, 562 (1945).