Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

С. ФИНИКОВ

СИСТЕМА КОНГРУЕНЦИЙ W С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРОИЗВОЛОМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 V 1951)

1. Террачини ([1]) назвал системой Бианки двупараметрическое многообразие конгруенций W, фокальные поверхности которых образуют два однопараметрических семейства. Я имел случай ([2]) рассматривать систему W, содержащую трехпараметрическое семейство конгруенций W, фокальные поверхности которых образуют двупараметрическое семейство линейчатых поверхностей. Эта система отличается от предыдущей не только размерностью, но и более общим строением. Система Бианки — Террачини присоединена к расслояемой паре конгруенций. Лучи конгруенций пары устанавливают на фокальных поверхностях системы взаимно-однозначное соответствие точек, сохраняющее асимптотические линии. В новой системе такого соответствия нет, есть только соответствие линий одного семейства (прямолинейных образующих). Наиболее общая двумерная система W с твердым соответствием линий одного семейства характеризуется тем, что эти линии (асимптотические линии одного семейства на каждой фокальной поверхности системы W) принадлежат каждая своему линейному комплексу, причем соответствующие между собой линии всех фокальных поверхностей принадлежат одному и тому же комплексу. Следовательно, конгруенции системы переводят каждую асимптотическую этого семейства в асимптотическую, принадлежащую тому же линейному комплексу.

В настоящей статье я рассматриваю системы W, многообразие конгруенций которых зависит от двух произвольных функций одного аргумента, а фокальные поверхности образуют два семейства, зависящих каждое от одной произвольной функции одного аргумента.

2. Присоединим к каждому лучу каждой конгруенции системы W тетраэдр 1-го порядка $\{A_i\}$: две вершины A_1, A_2 помещаются в фокусах луча, а две грани $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ служат его фокальными плоскостями.

Инфинитезимальные проективные преобразования аналитических точек A_i определим системой

$$dA_i = \omega_i^k A_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{1}$$

При заданной системе W уравнения

$$\omega_1^4 = 0, \quad [\omega_1^2\omega_2^4] + [\omega_1^3\omega_3^4] = 0 \tag{2}$$

определяют фокальные поверхности (A_1) системы. Поскольку характеристическая система состоит из пяти форм ω_1^4, ω_1^2, ω_1^3, ω_2^4, ω_3^4, а интегральное многообразие по условию зависит от одной произвольной функции одного аргумента, система дифференциальных уравнений, определяющая систему W, должна содержать уравнение вида

$$\omega_3^4 = A\omega_1^3 + B\omega_2^4 + C\omega_1^2 + D\omega_1^4, \tag{3}$$

где A, B, C, D — функции от переменных системы.

Квадратичное уравнение (2) теперь даст

$$\omega_1^2 = -B\omega_1^3 + \lambda(\omega_2^4 - C\omega_1^3), \tag{4}$$

где функция λ зависит от выбора фокальной поверхности (A_1); асимптотические линии на ней определяются уравнением

$$(A - BC - \lambda C^2)(\omega_1^3)^2 + \lambda(\omega_2^4)^2 = 0. \tag{5}$$

Уравнения (2), (3), (4), (5) для поверхностей (A_2) получаются подстановкой указателей $\binom{1\ 3}{2\ 4}$ и заменой коэффициентов A, B, C, D, λ на A', B', C', D', λ'.

Конгруенции (A_1A_2) системы W определяются теперь с двумя произвольными функциями одного аргумента. Они все будут конгруенциями W, если коэффициенты в уравнении (5) и аналогичном для поверхности (A_2) будут пропорциональны независимо от выбора значений λ, λ', откуда следует

$$C^2C'^2 = 1, \quad A = BC, \quad A' = B'C'.$$

Теперь уравнение (3) и аналогичное запишутся:

$$\omega_3^4 = B(C\omega_1^3 + \omega_2^4) + C\omega_1^2 + D\omega_1^4,$$
$$\varepsilon = \pm 1. \tag{6}$$
$$\omega_4^3 = B'\left(\omega_1^3 + \frac{\varepsilon}{C}\omega_2^4\right) + \frac{\varepsilon}{C}\omega_2^1 + D'\omega_2^3.$$

Искомые системы W определяются интегральным многообразием $\mathfrak{M}_6$ системы (6), на котором $[\omega_1^3\omega_2^4\omega_1^4\omega_2^3\omega_1^2\omega_2^1] \neq 0$.

3. Исследование внешних дифференциалов уравнений (6) приводит к заключению, что решения возможны только при $\varepsilon = 1$, $D = CD'$. Пользуясь свободой в выборе вершин A_3, A_4 тетраэдра в фокальных плоскостях, мы можем привести B, B', D к нулю, а C к единице. Дифференцируя в этом предположении уравнения (6) внешним образом и развертывая по лемме Картана, получим при подходящем выборе вершины A_i систему линейных уравнений

$$\omega_3^4 = \omega_1^2, \quad \omega_4^3 = \omega_2^1, \quad \omega_3^1 + \omega_4^2 = 0,$$
$$\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4 = \alpha(\omega_1^3 + \omega_2^4),$$
$$\omega_3^2 = \beta(\omega_1^3 + \omega_2^4) + \alpha\omega_1^2,$$
$$\omega_4^1 = \beta'(\omega_1^3 + \omega_2^4) - \alpha\omega_2^1$$

и квадратичных уравнений

$$\alpha[\omega_3^1, \omega_1^3 + \omega_2^4] = 0,$$
$$[\Delta\alpha, \omega_1^3 + \omega_2^4] = 0,$$
$$[\Delta\beta, \omega_1^3 + \omega_2^4] + [\Delta\alpha\omega_1^2] + \alpha[\omega_3^1\omega_1^4] = 0,$$
$$[\Delta\beta', \omega_1^3 + \omega_2^4] - [\Delta\alpha\omega_2^1] + \alpha[\omega_3^1\omega_2^3] = 0,$$

где формы $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\beta'$ содержат, соответственно, $d\alpha$, $d\beta$, $d\beta'$ вместе с линейной комбинацией форм ω_i^k. Искомые системы W определяются с четырьмя произвольными функциями одного аргумента.

Интегральное многообразие содержит характеристические многообразия $\omega_1^3+\omega_2^4=0$, $\omega_1^2=0$, $\omega_2^1=0$, $\omega_1^4=0$, $\omega_2^3=0$. На каждой фокальной поверхности системы им соответствуют асимптотические, между которыми на всей системе установлено твердое соответствие так, что соответствующие асимптотические принадлежат одному линейному комплексу.

Существует с произволом трех функций одного аргумента специальное решение $\alpha=0$, которое содержит трехмерные характеристические многообразия $\omega_1^3+\omega_2^4=0$, $\omega_1^2=0$, $\omega_2^1=0$. Все конгруенции W такой системы проективно эквивалентны.

Поступило
25 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Terracini, Atti dei Lincei, Rendiconti (6), 4, 348 (1926). [2] С. П. Фиников, Изв. АН СССР, сер. матем., **9**, 79 (1945); С. П. Фиников, Уч. зап. МГПИ, физ.-мат. фак., **2**, в. 4, 16 (1948).