Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

А. ПОВЗНЕР

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 V 1951)

Мы будем, для определенности, рассматривать во всем пространстве E уравнение $\mathscr{L}u + \lambda u = f$, где $\mathscr{L}u = \Delta u + C(x, y, z)u$. Результаты легко обобщаются на случай произвольного оператора эллиптического типа, рассматриваемого в области, внешней по отношению к некоторой замкнутой поверхности S, с граничными условиями для u на S типа $du/dn + \sigma u = 0$.

Как было показано Карлеманом [1], имеет место следующее предложение: в определенном случае (т. е. если уравнение $\mathscr{L}u + \lambda u = 0$ не имеет для комплексных λ решений из L^2) существует единственная спектральная функция $\vartheta(p, q; \lambda)$, обладающая свойствами (p, q — точки трехмерного пространства): а) $\vartheta(p, q; \lambda)$ непрерывна по обеим переменным p, q, имеет интегрируемый квадрат по каждой из переменных p, q и ограниченную вариацию по λ на всей оси, $\vartheta(p, q; \lambda) = \vartheta(q, p; \lambda)$; б) если интервалы (α, β) и (α_1, β_1) не имеют общих точек, то, полагая $\Delta_{\alpha,\beta}\vartheta(p, q) = \vartheta(p, q; \beta) - \vartheta(p, q; \alpha)$, получим $\int\limits_E \Delta_{\alpha,\beta}\vartheta(p, q)\Delta_{\alpha_1,\beta_1}\vartheta(q, r)\,dv(q) = 0$, и если $\sigma(p, q; \lambda)$ — непрерывная часть $\vartheta(p, q; \lambda)$, то $\int\limits_E \Delta\sigma(p, q)\,\Delta\sigma(q, r)\,dv(q) = \Delta\sigma(p, r)$; в) любая функция $g \subset L^2$ представима в виде $g(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \int\limits_E \vartheta(p, q; \lambda)\,g(q)\,dv(q)$;

г) $\mathscr{L}_p\Delta_{\alpha,\beta}\vartheta(p, q) + \int\limits_\alpha^\beta \lambda d_\lambda\vartheta(p, q; \lambda) = 0$.

Основной задачей настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *В определенном случае существует такая неубывающая, ограниченной вариации в каждом конечном интервале функция* $\tau(\lambda)$ *и функция* $\psi(p, q; \lambda)$, *что*:

α) $\psi(p, q; \lambda)$ *непрерывная функция по обеим переменным* p, q, $\int\limits_{D_1}\int\limits_{D_2}\left[\int\limits_a^b |\psi(p, q; \lambda)|\,d\tau(\lambda)\right] dv(p)\,dv(q) < \infty$, *если области* D_1, D_2 *и интервал* (a, b) *ограничены*;

β) $\mathscr{L}_p\psi(p, q; \lambda) + \lambda\psi = 0$; γ) $\Delta_{\alpha,\beta}\vartheta(p, q) = \int\limits_\alpha^\beta \psi(p, q; \lambda)\,d\tau(\lambda)$.

Чтобы не вводить обобщенных решений (см. ([1])), мы будем считать $C(p)$ непрерывной функцией.

Теорема 2. *Для каждого оператора* $\mathscr{L}$ *существует функция* $R(p, q; \lambda)$ $(\operatorname{Im}\lambda \gtrless 0)$, *аналитическая в верхней и нижней полуплоскости* λ, *такая, что*: $R(p, q; \lambda) = \frac{1}{4\pi(p-q)} + H(p, q; \lambda)$, *где* $H(p, q; \lambda)$ *непрерывна по обеим переменным* p, q; $\mathscr{L}_p R(p, q; \lambda) + \lambda R(p, q; \lambda) = 0$, $K(p, \lambda) = \int_E |R(p, q; \lambda)|^2 dv(q) < \infty$, $K(p, \lambda)$ *непрерывна по* p, $R(p, q; \lambda) = R(q, p; \lambda)$; *если* $f \subset L^2$, *то* $\int_E |F(p)|^2 dv(p) \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} \int_E |f(p)|^2 dv(p)$, *где* $F(p) = \int_E R(p, q; \lambda) f(q) dv(q)$.

В определенном случае решение из L^2 *уравнения* $\mathscr{L}u + \lambda u = f$, *где* $f \subset L^2$, *представимо в виде* $u = \int_E R(p, q; \lambda) f(q) dv(q)$.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с определенным случаем.

Лемма 1. *Пусть* (α, β) — *некоторый конечный интервал*; $\varphi_k(p)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — *ортонормированная система функций из* L^2, *удовлетворяющих уравнению* $\mathscr{L}(\varphi_k) + \lambda_k \varphi_k = 0$ *с* $\alpha \leqslant \lambda_k \leqslant \beta$. *Ряд* $E(p, q) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(p) \varphi_k(q)$ *сходится абсолютно и равномерно в каждой конечной области переменных* p, q *и является непрерывной функцией от обеих переменных.*

Лемма 1 показывает, что непрерывная часть функции $\vartheta(p, q; \lambda)$ тоже является непрерывной функцией обеих переменных p, q. В дальнейшем мы будем считать функцию $\vartheta(p, q; \lambda)$ непрерывной функцией λ.

Пусть K_r обозначает сферу леммы 1. Интегрируя г) по частям и пользуясь формулой Грина, получим для точек $p \subset K_r$ (S_r — поверхность K_r)

$$\Delta_{\gamma, \lambda}\vartheta(p, q) = \int_{S_r} \frac{dg_r(p, s)}{dn_s} \Delta_{\gamma, \lambda}\vartheta(s, q)\, ds + \int_{K_r} g_r(p, h)(C(h) + \lambda)\Delta_{\gamma, \lambda}\vartheta(h, q)\, dv(h) - \int_{\gamma}^{\lambda} d\mu \int_{K_r} g_r(p, h)\Delta_{\gamma, \mu}\vartheta(h, q)\, dv(h). \quad (1)$$

Интегрируя (1) по r от r до $r+1$, получим:

$$\Delta_{\gamma, \lambda}\vartheta(p, q) = \int_{K_{r+1}} H_1(p, h)\, \Delta_{\gamma, \lambda}\vartheta(h, q)\, dv(h) + \lambda \int_{K_{r+1}} H_2(p, h)\, \Delta_{\gamma, \lambda}\vartheta(h, q)\, dv(h) + \int_{\gamma}^{\lambda} \left[\int_{K_{r+1}} H_3(p, h)\, \Delta_{\gamma, \mu}\vartheta(h, q)\, dv(h) \right] d\mu, \quad (2)$$

где H_1, H_2, H_3 при $p \subset K_{r-1}$ удовлетворяют условию:

А. Существует такая постоянная M_r, зависящая только от r, что $\int_{K_{r+1}} |H_i(p, h)|^2 dv(h) < M_r^2$ $(i = 1, 2, 3)$.

Полагая $H_1(p, h) + \lambda H_2(p, h) = H(p, h; \lambda)$ и меняя в (2) местами p и q, получим для $p, q \subset K_{r-1}$

$$\Delta_{\gamma,\lambda}\vartheta(p, q)=\int\limits_{K_{r+1}} H(q, t; \lambda)\,\Delta_{\gamma,\lambda}\vartheta(p, t)\,dv(t)+$$

$$+\int\limits_{\gamma}^{\lambda}\Big[\int\limits_{K_{r+1}} H_3(q, t)\,\Delta_{\gamma,\mu}\vartheta(t, p)\,dv(t)\Big]\,d\mu. \tag{3}$$

Заменив в (2) q на t и вставив выражение для $\Delta_{\gamma,\lambda}\vartheta(p, t)$ из (2) в (3), будем иметь

$$\Delta_{\gamma,\lambda}\vartheta(p, q)=\int\limits_{K_{r+1}}\int\limits_{K_{r+1}} H(q, t; \lambda)\,H(p, h; \lambda)\,\Delta_{\gamma,\lambda}\vartheta(h, t)\,dv(h)\,dv(t)+$$

$$+\int\limits_{\gamma}^{\lambda} d\mu\int\limits_{K_{r+1}}\int\limits_{K_{r+1}} H(q, t; \lambda)\,H_3(p, h)\,\Delta_{\gamma,\mu}\vartheta(h, t)\,dv(h)\,dv(t)+$$

$$+\int\limits_{\gamma}^{\lambda} d\mu\int\limits_{K_{r+1}} H_3(q, t)\,\Delta_{\gamma,\mu}\vartheta(t, p)\,dv(t). \tag{4}$$

Положим $l_{\Delta}^2=\int\limits_{K_{r+1}}\int\limits_{K_{r+1}}[\Delta\vartheta(h, t)]^2\,dv(h)\,dv(t)$. Так как $[\Delta\vartheta(h, t)]^2\leqslant\leqslant\Delta\vartheta(h, h)\,\Delta\vartheta(t, t)$, то

$$l_{\Delta}\leqslant\int\limits_{K_{r+1}}\Delta\vartheta(h, h)\,dv(h). \tag{5}$$

Рассмотрим некоторый фиксированный куб D и фиксированный интервал Δ_δ оси λ $|\lambda|\leqslant\delta$. Выберем r так, чтобы $D\subset K_{r-1}$. Положим $\sigma(\mu)=\int\limits_{K_{r-1}}\Delta_{-\delta,\mu}\vartheta(h, h)\,dv(h)$. Функция $\sigma(\mu)$ неубывающая, непрерывная функция ограниченной вариации на Δ_δ. Построим теперь в пространстве $\overline{D}$, являющемся прямым произведением $D\times D\times\Delta_\delta$, функции сегмента ([2]), положив $P_1(J)=(x_2-x_1)\cdots(z_2'-z_1')\,[\sigma(\mu_2)-\sigma(\mu_1)]$, $P_2(J)=(x_2-x_1)\cdots(z_2'-z_1')\,(\mu_2-\mu_1)$, $P(J)=P_1(J)+P_2(J)$ и $T(J)=$ $=\int\limits_{x_1}^{x_2}\cdots\int\limits_{z_1'}^{z_2'}\Delta_{\mu_1,\mu_2}\vartheta(p, q)\,dx\ldots dz'$, где $J=[x_1;\ x_2;\ ;\ldots;\ z_1,\ z_2;\ x_1',\ x_2';\ \ldots$ $\ldots;\ z_1',\ z_2';\ \mu_1,\ \mu_2]$.

Покажем, что T абсолютно непрерывна относительно p. Нужно показать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T(J_k^n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(J_k^n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Вставляя в $T(J)$ выражение для $\Delta\vartheta(p, q)$ из (4), рассмотрим отдельные возникающие при этом члены. Так как $|\lambda|\leqslant\delta$, то, в силу условия А, при $p, q\subset D$

$$\Big|\int\limits_{K_{r+1}}\int\limits_{K_{r+1}} H(q, t; \mu_2)\,H(p, h; \mu_2)\,\Delta_{\mu_1,\mu_2}\vartheta(h, t)\,dv(h)\,dv(t)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int\limits_{K_{r+1}}\int\limits_{K_{r+1}} H^2(q, t; \mu_2)\,H^2(p, h; \mu_2)\,dv(t)\,dv(h)}\;\times$$

$$\times\sqrt{\int\limits_{K_{r+1}}\int\limits_{K_{r+1}}(\Delta_{\mu_1,\mu_2}\vartheta(h, t))^2\,dv(h)\,dv(t)}\leqslant C\,(\sigma(\mu_2)-\sigma(\mu_1)),$$

где C зависит только от r и δ. Но тогда

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} dx \ldots \int_{z_1'}^{z_2'} dz' \int_{K_{r+1}} \int_{K_{r+1}} H(q, t; \mu_2) H(p, h; \mu_2) \Delta_{\mu_1, \mu_2}\vartheta(h, t)\, dv(h)\, dv(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant CP_1(J).$$

Далее,

$$\left|\int_{\mu_1}^{\mu_2}\left[\int_{K_{r+1}} H_3(q, t)\, \Delta_{\mu_1, \mu_2}\vartheta(t, p)\, dv(t)\right] d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mu_1}^{\mu_2} \sqrt{\int_{K_{r+1}} H_3^2(q, t)\, dv(t)}\sqrt{\int_{K_{r+1}} (\Delta_{\mu_1, \mu_2}\vartheta(t, p))^2\, dv(t)} \leqslant$$

$$\leqslant (\mu_2 - \mu_1) M_r \sqrt{\int_{K_{r+1}} \Delta_{-\delta, \delta}\, \vartheta(t, t)\, dv(t)}\, \max_{P\subset D} \sqrt{\Delta_{-\delta, \delta}\, \vartheta(p, p)},$$

откуда

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} dx \ldots \int_{z_1'}^{z_2'}\int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_{K_{r+1}} H_3(q, t)\, \Delta_{\mu_1, \mu_2}\vartheta(t, p)\, dv(t)\right| \leqslant C_1 P_2(J).$$

Точно так же оценивается оставшийся член. Эти оценки и дают, очевидно, доказательство нашего утверждения.

Беря расширяющуюся последовательность кубов D_n, обозначая соответствующие функции σ через σ_n и полагая $\tau(\mu) = \sum_1^\infty \varepsilon_n \left[\sigma_n(\mu) + \mu + \delta\right]$, где $\varepsilon_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n (\sigma_n(\delta) + 2\delta)$ сходится, получим, что функция сегмента $T(J)$, где J — уже любой сегмент, абсолютно непрерывна относительно функции $\tilde{P}(J) = (x_2 - x_1) \ldots (z_2' - z_1')\left[\tau(\mu_2) - \tau(\mu_1)\right]$. Но тогда, по теореме Родона — Никодима, существует такая функция $\psi(p, q; \lambda)$, что

$$\int_{x_1}^{x_2} \ldots \int_{z_1'}^{z_2'} \Delta_{-\delta, \mu}\vartheta(p, q)\, dx \ldots dz_1' = \int_{x_1}^{x_2} dx \ldots \int_{z_1'}^{z_2'} dz' \int_{-\delta}^{\mu} \psi(p, q; \lambda)\, d\tau(\lambda),$$

что, в основном, доказывает теорему 1. Свойства функции ψ устанавливаются без особого труда.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Поступило 5 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Arkiv för Math., Astr. och Fysik, 24, B, No. 11 (1934).
[2] С. Сакс, Теория интеграла, 1949.