Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

М. КАТЕТОВ

О РАЗМЕРНОСТИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 IV 1951)

Обозначим через $\dim P$ размерность топологического пространства P, определенную при помощи (конечных) покрытий. Обозначим через $\operatorname{Ind} P$ «большую» индуктивную размерность P, т. е. размерность, определяемую индуктивно при помощи границ окрестностей замкнутых множеств ([1]). Известно ([2]), что $\dim P \leqslant \operatorname{Ind} P$, если P нормально. Если P — метрическое пространство со счетной базой, то $\dim P = \operatorname{Ind} P$. Вопрос о возможности распространения этого равенства хотя бы только на метрические пространства (с базой любой мощности) оставался до сих пор открытым.

Назовем систему $\{G_\lambda\}$ подмножеств пространства P локально конечной, если любое $x \in P$ обладает окрестностью, пересекающей лишь конечное число множеств G_λ.

Лемма 1. *Пусть P — нормальное пространство. Пусть $\{G_\lambda\}$ является его локально конечным открытым покрытием порядка $\leqslant n$, где $n \geqslant 1$. Пусть дано число $\varepsilon > 0$ и непрерывные (вещественные) функции $f_1, \ldots, f_n$ в P такие, что для любого G_λ* и $k = 1, \ldots, n$ *множество $f_k(G_\lambda)$ имеет диаметр $< \varepsilon$. Пусть далее $\delta > 0$, $c > \delta + \varepsilon$. Тогда существуют непрерывные функции $g_1, \ldots, g_n$ такие, что:*

1) $|f_k(x) - g_k(x)| \leqslant c$ *для любого* $x \in P$;

2) *если $S \subset P$ и все $g_k(S)$ имеют диаметр $< \delta$, то S представимо в виде суммы непересекающихся открытых в S множеств, каждое из которых содержится в некотором G_λ.*

Предполагая справедливость утверждения леммы для n, докажем его для $n+1$. По известной лемме ([3]), существуют открытые H_λ такие, что $\overline{H}_\lambda \subset G_\lambda$, $\Sigma H_\lambda = P$. Обозначим через U_ξ множество вида $\prod_{i=1}^{n+2} G_{\lambda_i}$, а через V_ξ — соответствующие $\prod_{i=1}^{n+2} H_{\lambda_i}$; положим $Q = P - \Sigma V_\xi$. Система $\{H_\lambda Q\}$ имеет порядок $\leqslant n$, из чего, согласно предположению, вытекает существование непрерывных функций $g_1, \ldots, g_n$ таких, что: 1) $|f_k(x) - g_k(x)| \leqslant c$ для $x \in P$ и $k = 1, \ldots, n$; 2) если $T \subset Q$ и все $g_k(T)$ имеют диаметр $< \delta$, то T допускает указанное выше разбиение. Пусть $A = \Sigma \overline{V}_\xi$, $B = P - \Sigma U_\xi$. Принимая во внимание, что система $\{V_\xi\}$ локально конечна, легко усмотреть, что A, B замкнуты, $AB = 0$. Пусть φ — непрерывная функция в P, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant c$, $\varphi(x) = 0$ для $x \in A$, $\varphi(x) = c$ для $x \in B$. Положим $g_{n+1} = f_{n+1} + \varphi$.

Пусть $S \subseteq P$ и все $g_k(S)$, где $k = 1, \ldots, n+1$, имеют диаметр $< \delta$. Для каждого ξ' такого, что пересечение $S\overline{V}_{\xi'}$ не пусто, имеем:

$SU_{\xi'} = S\overline{U}_{\xi'}$. Действительно, в противном случае возьмем точки $a \in S\overline{V}_{\xi'}$ и $b \in S(\overline{U}_{\xi'} - U_{\xi'})$. Так как a и b одновременно содержатся в некотором $\overline{G}_\lambda$, так как $a \in A$, а $b \in B$, то $|g_{n+1}(b) - g_{n+1}(a)| = |c + f_{n+1}(b) - f_{n+1}(a)| \geqslant c - |f_{n+1}(b) - f_{n+1}(a)| \geqslant c - \varepsilon > \delta$, что противоречит условию диам. $(g_{n+1}(S)) < \delta$. Значит, каждое из множеств $SU_{\xi'}$ замкнуто в S. Положим $R = \sum_{\xi'} SU_{\xi'}$, где сумма берется по всем ξ' таким, что $S\overline{V}_{\xi'} \neq 0$. Так как система $\{U_\xi\}$ локально конечна, то из этого вытекает, что R замкнуто (и открыто) в S. Следовательно, ввиду того, что $S - R \subset Q$, S допускает требуемое разбиение.

Если P — пространство, обозначим через $C(P, E^n)$ пространство (с его обычной метрикой) ограниченных непрерывных отображений P в n-мерное евклидово пространство E^n.

Лемма 2. *Если P — нормальное пространство, $\dim P \leqslant n$, где $n \geqslant 1$, то для любого локально конечного открытого покрытия $\{G_\lambda\}$, любого $f \in C(P, E^n)$ и $c > 0$ существует такое $g \in C(P, E^n)$ и число $\delta > 0$, что*:

1) $\rho(f, g) \leqslant c$;

2) *если $g(S)$, где $S \subset P$, имеет диаметр $< \delta$, то S представимо как сумма непересекающихся открытых в S множеств, каждое из которых содержится в некотором G_λ.*

Это вытекает из леммы 1 и теоремы Даукера [4], утверждающей, что при $\dim P \leqslant n$ в каждое локально конечное покрытие пространства P можно вложить локально конечное покрытие порядка $\leqslant n$.

Назовем отображение f метрического пространства P в метрическое пространство Q равномерно нульмерным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если $f(S)$, где $S \subset P$, имеет диаметр $< \delta$, то S является суммой непересекающихся открытых в S множеств диаметра $< \varepsilon$.

Лемма 3. *Если P — метрическое пространство, $\dim P \leqslant n$, то множество равномерно нульмерных $f \in C(P, E^n)$ есть плотное G_δ в $C(P, E^n)$.*

Эта лемма выводится стандартным образом из леммы 2, причем применяется теорема Стона [5], утверждающая, что во всякое открытое покрытие метрического пространства можно вложить локально конечное открытое покрытие.

Лемма 4. *Если метрическое пространство P (с заданной метрикой) представимо при любом $\varepsilon > 0$ как сумма непересекающихся открытых множеств диаметра $< \varepsilon$, то $\operatorname{Ind} P \leqslant 0$.*

Лемма 5. *Пусть P — совершенно нормальное пространство* (т. е. *P нормально и всякое замкнутое $F \subset P$ есть G_δ). Если $P = A + B$, $\operatorname{Ind} A \leqslant m$, $\operatorname{Ind} B \leqslant n$, то $\operatorname{Ind} P \leqslant m + n + 1$.*

Это легко доказать, пользуясь теоремой сложения [1] для индуктивной размерности совершенно нормальных пространств.

Из леммы 4 и 5 вытекает лемма 6.

Лемма 6. *Если P — метрическое пространство и существует равномерно нульмерное $f \in C(P, E^n)$, то $\operatorname{Ind} P \leqslant n$.*

Из леммы 3 и 6 вытекает теорема.

Теорема. *Пусть P — метризуемое пространство.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\dim P \leqslant n$;

2) $\operatorname{Ind} P \leqslant n$;

3) *при некоторой метрике пространства P существует равномерно нульмерное непрерывное отображение P в E^n (причем E^0 означает, конечно, одноточечное пространство);*

4) *такое отображение существует при любой метрике пространства* P;

5) P *представимо как сумма не более* $n+1$ *нульмерных множеств.*

Отметим еще одно простое следствие приведенных лемм:

Пусть P *метризуемо. Тогда для* $\dim P \leqslant 0$ *необходимо и достаточно, чтобы* P *было гомеоморфно подмножеству топологического произведения счетного числа дискретных пространств.*

Пражский университет
Прага, Чехословакия

Поступило
6 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Čech, Bull. Int. Acad. Sci. Bohême, **33**, 38 (1932). [2] H. Веденисов, Изв. АН СССР, сер. матем., **5**, 211 (1941). [3] S. Lefschetz, Algebraic Topology, 1942. [4] C. H. Dowker, Am. Journ. Math., **69**, 200 (1947). [5] A. H. Stone, Bull. Am. Math. Soc., **54**, 977 (1948).