Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

А. И. ВОЛЬПЕРТ

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 15 V 1951)

Рассматривается однородная эллиптическая система линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка общего вида на плоскости:

$$A^{20}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2A^{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+A^{02}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A^{10}\frac{\partial u}{\partial x}+A^{01}\frac{\partial u}{\partial y}+A^{00}u=0, \qquad (1)$$

где $A^{ij}=A^{ij}(x, y)$ — квадратные матрицы, элементами которых служат $i+j+2$ раз непрерывно дифференцируемые в некоторой области D действительные функции действительных переменных x, y; $u=(u_1, \ldots, u_p)$.

Пусть задана m-связная конечная область $T\subset D$, ограниченная гладким в смысле Гельдера контуром L*. Под регулярным в области T вектором понимается вектор, удовлетворяющий системе (1) и имеющий в T вторые непрерывные производные.

В настоящей заметке рассматривается:

З а д а ч а Д и р и х л е. Найти вектор $u(x, y)$, регулярный в области T, непрерывной в $T+L$ и удовлетворяющий граничному условию

$$u^+(t)=f(t) \qquad (t\in L),$$

где $f(t)$ — заданный, непрерывный в смысле Гельдера вектор ($u^+(t)$ — предельное значение $u(x, y)$ при $(x, y)\to t\in L$ из области T).

Решение задачи Дирихле ищется при помощи фундаментальных матриц, построенных Я. Б. Лопатинским [1, 2], в виде интеграла (который можно рассматривать как обобщение потенциала двойного слоя для системы (1):

$$u(x, y)=\int_L [C_1(\zeta, z)\cos(\nu\xi)+C_2(\zeta, z)\cos(\nu\eta)]\,\mu(\zeta)\,ds, \qquad (2)$$

где

$$C_1(\zeta, z)=-\frac{\partial[\varphi(\zeta, z)A^{20}(\zeta)]}{\partial\zeta}-\frac{\partial[\varphi(\zeta, z)A^{11}(\zeta)]}{\partial\eta}+\varphi(\zeta, z)A^{10}(\zeta);$$

$$C_2(\zeta, z)=-\frac{\partial[\varphi(\zeta, z)A^{02}(\zeta)]}{\partial\eta}-\frac{\partial[\varphi(\zeta, z)A^{11}(\zeta)]}{\partial\xi}+\varphi(\zeta, z)A^{01}(\zeta);$$

$$z=x+iy, \quad \zeta=\xi+i\eta; \quad z\in T, \quad \zeta\in L.$$

---

* См., например, (4), стр. 11.

Считая вектор $\mu(\zeta)$ удовлетворяющим условию Гельдера на L и переходя к пределу в (2) при $(x, y) \to t \in L$, получают:

$$u^+(t) = \frac{1}{2}\mu(t) + \int_L [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,\mu(\zeta)\,ds,$$

причем интеграл понимается в смысле главного значения.

Таким образом, для определения вектора $\mu(\zeta)$ получается сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2}\mu(t) + \int_L [C_1(\zeta, t)\cos(\nu\xi) + C_2(\zeta, t)\cos(\nu\eta)]\,\mu(\zeta)\,ds = f(t). \tag{3}$$

При исследовании полученного интегрального уравнения основное значение имеет матричный логарифмический вычет:

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A^{-1}(z, \alpha)\frac{d}{d\alpha}A(z, \alpha)\,d\alpha \qquad (z \in T + L),$$

где

$$A(z, \alpha) = A^{20}(z)\alpha^2 + 2A^{11}(z)\alpha + A^{02}(z),$$

Γ — контур в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > 0$, охватывающий все корни полинома $\det A(z, \alpha)$ (по α), лежащие в этой полуплоскости.

Очевидно,

$$R(z) = \sum_\alpha \operatorname{Res}\left[A^{-1}(z, \alpha)\frac{d}{d\alpha}A(z, \alpha)\right],$$

где сумма берется по всем нулям полинома $\det A(z, \alpha)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha > 0$.

Уравнение (3) представляется в виде:

$$\frac{1}{2}\mu(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - t} + M\mu = f(t), \tag{4}$$

где M — оператор Фредгольма.

Основные матрицы* этого уравнения выражаются через $R(z)$ и комплексно-сопряженную ей матрицу $\overline{R(z)}$:

$$^1/_2 E - B(t) = {}^1/_2 R(t), \quad ^1/_2 E + B(t) = {}^1/_2 \overline{R(t)} \quad (t \in L). \tag{5}$$

Отсюда следует, что если

$$R(t) = E \qquad (t \in L) \tag{6}$$

(E — единичная матрица), то (3) является уравнением Фредгольма.

Если в системе (1)

$$A^{11}(t) = 0 \qquad (t \in L)$$

(в частности, если старшие члены — операторы Лапласа), то условие (6) выполняется. Условие (6) выполняется также, если система (1) имеет диагональную форму относительно старших членов.

Из (5) следует, что если

$$\det R(t) \neq 0 \quad (t \in L),$$

* Термины, относящиеся к сингулярным интегральным уравнениям, см. (3).

то уравнение (4) допускает регуляризацию, причем регуляризующий оператор и полученное уравнение Фредгольма могут быть записаны явно.

Очевидно, если $\mu(t)$ есть решение уравнения (4), удовлетворяющее условию Гельдера на L, то вектор $u(x, y)$, представленный формулой (2), является решением задачи Дирихле.

При выполнении условия

$$\det R(z) \neq 0 \qquad (z \in T + L) \tag{7}$$

индекс уравнения (4) равен нулю, и из отсутствия ненулевого решения однородного уравнения (4) следует разрешимость задачи Дирихле для любого вектора $f(t)$, непрерывного в смысле Гельдера на L.

В качестве примера рассматривается система, в которой приводят некоторые задачи плоской теории упругости ортотропного тела:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + \ldots = 0,$$

$$b\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \ldots = 0,$$

где a, b, c, d — постоянные, удовлетворяющие условию эллиптичности; многоточиями обозначены члены, содержащие u, v и их первые производные.

Условие (7) для этой системы имеет вид:

$$b^2 \neq 4d\sqrt{ac}.$$

Львовский государственный университет
им. Ивана Франко

Поступило
16 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Б. Лопатинский, ДАН, 71, № 3 (1950). [2] Я. Б. Лопатинский, ДАН, 78, № 5 (1951). [3] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946. [4] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, 1948.