Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. Л. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ и Д. Н. ЧЕТАЕВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТРАНЕНИИ ОТРАЖЕНИЙ В ВОЛНОВОДАХ С ПЕРЕМЕННЫМ СЕЧЕНИЕМ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 16 V 1951)

1. В настоящей статье рассматривается прямоугольный волновод с переменным сечением и предлагается конструктивный метод устранения отражений, вызываемых неоднородностью его формы. Показано, что если заполнить волновод неоднородной средой, характеристики которой определенным образом связаны с неоднородностью его формы, то можно полностью устранить отражения волн типа H_{n0}.

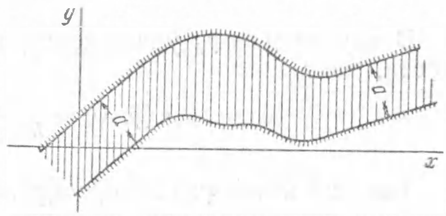

Рис. 1

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется плоский (бесконечный по координате z) волновод с пренебрежимо малым сопротивлением стенок и с сечением, произвольно меняющимся в конечной части плоскости (x, y), вне которой он является также плоским, но с расстоянием между стенками, равным a или стремящимся к a при удалении в бесконечность.

Введем внутри волновода ортогональные криволинейные координаты φ, ψ, z, из которых φ и ψ определяются конформным преобразованием

$$Z = x + iy = f(w), \tag{1}$$

переводящим область, указанную на рис. 1, в слой $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$ плоскости $w = \varphi + i\psi$, а z является обычной декартовой координатой. Если предположить, что поля не зависят от координаты z, то уравнения Максвелла в координатах φ, ψ, z разделяются на две группы: для компонент E_z, H_φ, H_ψ:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\psi}\right) + k^2h^2\varepsilon E_z = 0,\\ H_\varphi = -\frac{i}{k\mu h}\frac{\partial E_z}{\partial\psi}, \quad H_\psi = \frac{i}{k\mu h}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right)\end{gathered} \tag{2}$$

и для компонент H_z, E_φ, E_ψ:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{H_z}{\partial\psi}\right) + k^2h^2\mu H_z = 0,\\ E_\varphi = \frac{i}{k\varepsilon h}\frac{\partial H_z}{\partial\psi}, \quad E_\psi = -\frac{i}{k\varepsilon h}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь среда, заполняющая волновод, считается неоднородной; зависимость от времени выбрана в виде $e^{-i\omega t}$, а

$$h = |f'(w)|. \tag{4}$$

Граничные условия принимают вид: для уравнений (2) $E_z|_{\psi=0,\pi}=0$ и для уравнения $\left.\frac{\partial H_z}{\partial\psi}\right|_{\psi=0,\,\pi}=0$.

2. Ограничимся рассмотрением первой группы уравнений, так как второй случай исследуется аналогично. Идея предлагаемого метода заключается в выборе такой неоднородности $\varepsilon(\varphi,\psi)$ и $\mu(\varphi,\psi)$, чтобы сделать возможным распространение бегущей волны. Если, например, потребовать, чтобы могла распространяться без отражения волна

$$E_z=Ae^{\pm i\gamma_n\varphi}\sin n\psi \quad (n=1,2,\ldots), \tag{5}$$

удовлетворяющая граничным условиям, то для определения ε и μ получаем уравнение:

$$\pm i\gamma_n\mu\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\mu}\right)+\mu n\operatorname{ctg} n\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\mu}\right)+k^2\left(\mu\varepsilon h^2-\frac{a^2}{\pi^2}\mu_0\varepsilon_0\right)=0, \tag{6}$$

так как для волны (5) выполнено условие

$$\gamma_n^2+n^2=\frac{a^2}{\pi^2}k^2\varepsilon_0\mu_0. \tag{7}$$

В случае $\mu\equiv\mu_0$ уравнение (6), определяющее характер неоднородности, дает

$$\varepsilon(\varphi,\psi)=\frac{\varepsilon_0}{h^2(\varphi,\psi)}\frac{a^2}{\pi^2}\quad(\mu\equiv\mu_0). \tag{8}$$

Так как конформное преобразование (1) дает представление комплексной потенциальной функции плоского конденсатора, имеющего форму рассматриваемого волновода ([1]), то координатные поверхности $\psi=\text{const}$ и $\varphi=\text{const}$ дают поверхности эквипотенциальных и, соответственно, силовых линий. Поэтому очевидно, что вдали от неоднородностей формы волновода волны (5) представляют собой обычные волны магнитного типа H_{n0}. Известно ([2]), что волны этого типа могут распространяться также в прямоугольном волноводе, образованном пересечением поверхностей $\psi=0$ и $\psi=\pi$ с плоскостями $z=0$ и $z=b$. Таким образом, отражение волн типа H_{n0} устраняется и в этом случае.

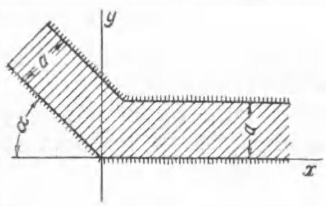

Рис. 2

Понятно, что в случае произвольных изгибов волновода аналитический расчет неоднородности (8) представляет известные трудности. Однако функцию $\varepsilon(\varphi,\psi)$ можно определить с достаточной степенью точности экспериментально, методом электростатического моделирования.

Если разность потенциалов между металлическими пластинами, имеющими форму волновода, равна U, а напряженность поля конденсатора обозначить через $\vec{\mathcal{E}}$, то функция $h(\varphi,\psi)$ связана с $\mathcal{E}$ и U известным образом ([1]):

$$h(\varphi,\psi)=|f'(w)|=\frac{U}{\pi\mathcal{E}}. \tag{9}$$

Таким образом, определение функции $h(\varphi,\psi)$ свелось к определению поля конденсатора. После определения поля $\mathcal{E}$ может быть рассчитана неоднородность (8), компенсирующая неоднородность формы волновода.

Нетрудно видеть, что в плоских частях волновода

$$\mathcal{E} \cong \frac{U}{a}, \quad h \cong \frac{a}{\pi}, \quad \varepsilon \cong \varepsilon_0. \tag{10}$$

Таким образом, устраняющая отражения неоднородность должна быть сосредоточена в области переменного сечения волновода.

Практическое осуществление неоднородности, заполняющей волновод, с непрерывно изменяющимися характеристиками затруднительно. Однако всегда можно приближенно представить неоднородность (8) с помощью ступенчатой неоднородности и сделать отражения достаточно малыми.

3. В качестве примера рассмотрим поворот прямоугольного волновода на угол α (рис. 2). Комплексная потенциальная функция Z в этом случае имеет вид:

$$Z = \frac{a}{\pi} \int \left(\frac{e^w + 1}{e^w - 1} \right)^{\alpha/\pi} dw, \tag{11}$$

а для неоднородности (8) получаем:

$$\varepsilon(\varphi, \psi) = \varepsilon_0 \left[\frac{1 - 2e^\varphi \cos\psi + e^{2\varphi}}{1 + 2e^\varphi \cos\psi + e^{2\varphi}} \right]^{\alpha/2\pi}. \tag{12}$$

В частном случае поворота на угол $\pi/2$ линии постоянного ε определяются уравнением

$$\cos\psi = \frac{1 + e^{2\varphi}}{2e^\varphi} \frac{1 - \bar{\varepsilon}^2}{1 + \bar{\varepsilon}^2}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}. \tag{13}$$

Вычисляя интеграл (11) и разделяя мнимые и действительные части, получим формулы для перехода к координатам x и y:

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{a}{2\pi} [\arccos(+\sqrt{1 - 2e^{-2\varphi}\cos 2\psi + e^{-4\varphi}} - e^{-2\varphi}) + \\ & + \operatorname{ar\,ch}(+\sqrt{1 - 2e^{2\varphi}\cos 2\psi + e^{4\varphi}} + e^{2\varphi})] + \frac{a}{2}, \\ y = {} & \frac{a}{2\pi} [\operatorname{ar\,ch}(+\sqrt{1 - 2e^{-2\varphi}\cos 2\psi + e^{-4\varphi}} + e^{-2\varphi}) + \\ & + \arccos(+\sqrt{1 - 2e^{2\varphi}\cos 2\psi + e^{4\varphi}} - e^{2\varphi})] + \frac{a}{2}. \end{aligned} \tag{14}$$

На рис. 3 приведены линии постоянства $\bar{\varepsilon}$ в плоскости переменных x и y.

4. Мы рассматривали до сих пор случай заполнения диэлектриком, проводимость которого равна нулю. В случае малой проводимости диэлектриков, помещенных внутрь волновода, затухание будет малым и характер прохождения волны останется в основном прежним. Действительно, из равенств

$$\varepsilon = \frac{1}{h^2} \left(\varepsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \frac{a^2}{\pi^2}, \quad \frac{4\pi\sigma}{\omega} \ll \varepsilon_0 \tag{15}$$

следует, что условие (7) заменяется на

$$\bar{\gamma}^2 + n^2 = k^2 \frac{a^2}{\pi^2} \left(\varepsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mu_0 \tag{16}$$

и волна (5) получает небольшое затухание δ:

$$\bar{\gamma} = \gamma + i\delta \cong \gamma \left(1 + i \frac{2\pi\sigma k^2}{\omega \gamma^2} \right), \quad \delta \ll \gamma. \tag{17}$$

В случае, когда ε_0 велико по сравнению с единицей, область, для которой $\varepsilon = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} < 1$, становится малой и отражением от нее можно пренебречь. В наиболее естественном случае заполнения волновода воздухом ($\varepsilon_0 = 1$) практическое осуществление $\bar{\varepsilon} = \varepsilon < 1$ становится затруднительным. Но волны типа (5) могут распространяться также в верхней части волновода, ограниченной снизу металлической стенкой,

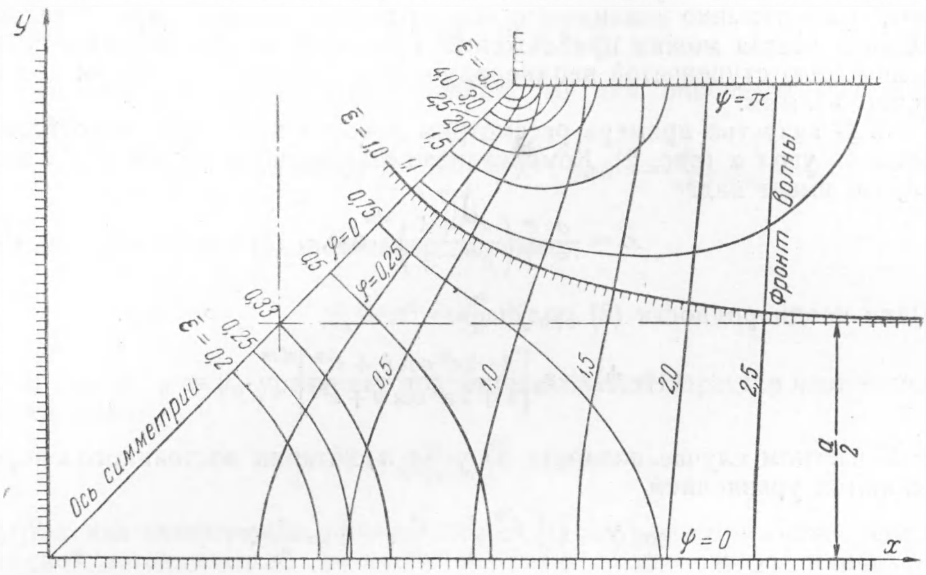

Рис. 3. Линии постоянства ε и линии фронта волны $\varphi = \mathrm{const}$ в продольном сечении волновода, линия $\bar{\varepsilon} = 1$ совпадает с кривой $\psi = \frac{\pi}{2}$

поставленной по линии $\psi = \pi/2$ (рис. 3). В этом случае, как видно на рис. 3, компенсирующая неоднородность имеет размеры порядка длины волны и затухание, вносимое малой проводимостью диэлектриков, будет несущественным.

Предложенный метод устранения отражений является чисто конструктивным и позволяет обойти их предварительный расчет, представляющий обычно большие трудности. Отметим, что конформные преобразования, как это видно из статьи ([3]) одного из авторов, оказываются полезными и для расчета отражений.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. Н. Тихонову, руководившему выполнением этой работы.

Поступило
11 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, гл. 15, 1937. [2] Б. А. Введенский и А. Г. Аренбург, Радиоволноводы, ч. 1, 1946. [3] Б. Л. Рождественский, ДАН, 77, № 2, 221 (1951).