Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

М. Б. БАЛК

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 15 V 1951)

1. Пусть $f(z)$ — функция, регулярная в нулевой точке; μ, ν — пара целых неотрицательных чисел. В классе несократимых дробей $\{\Phi_{\mu,\nu}(z)\}$, у которых знаменатели — многочлены от z степени не выше μ, а числители — многочлены от z степени не выше ν, имеется, и притом лишь одна, дробь $F_{\mu,\nu}(z)$, удовлетворяющая следующему условию: существует натуральное число m такое, что

$$F^{(k)}_{\mu,\nu}(0) = f^{(k)}(0) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

и для всякой дроби $\Phi_{\mu,\nu}(z)$ того же класса, отличной от $F_{\mu,\nu}(z)$, хотя бы одно из $m+2$ равенств

$$\Phi^{(k)}_{\mu,\nu}(0) = f^{(k)}(0) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m, m+1) \tag{2}$$

не выполняется.

Дробь $F_{\mu,\nu}(z)$ мы в дальнейшем называем «интерполяционной дробью типа $\Pi(0)$ с индексами μ, ν для функции $f(z)$» или «дробью Падэ» [1]. Иногда ее записываем также в виде

$$F_{\mu,\nu}[z, f(z)] \quad \text{или} \quad \frac{P_{\mu,\nu}(z)}{Q_{\mu,\nu}(z)},$$

где $Q_{\mu,\nu}(0) = 1$.

Дроби $\{F_{\mu,\nu}(z)\}$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots; \nu = 0, 1, 2, \ldots$) можно расположить в виде таблицы с двойным входом (μ — номер строки, ν — номер столбца). Это так называемая таблица Падэ («таблица типа $\Pi(0)$»).

Результаты настоящего сообщения относятся к конструкции интерполяционных дробей типа $\Pi(0)$ и исследованию сходимости различных последовательностей таких дробей.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением дробей $\{F_{\mu,\nu}(z)\}$, расположенных справа от главной диагонали таблицы $\Pi(0)$ (т. е. $\nu \geqslant \mu$). Изучение дробей, расположенных слева от главной диагонали таблицы $\Pi(0)$ ($\nu \leqslant \mu$), для функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сводится, вообще говоря, к изучению дробей, расположенных справа от главной диагонали в таблице типа $\Pi(0)$ для функции $\frac{1}{f(z)}$ в силу того, что

$$F_{\mu,\nu}[z, f(z)] = \frac{1}{F_{\nu,\mu}\left[z, \frac{1}{f(z)}\right]},$$

если $f(0) \neq 0$ и

$$d_{\mu,\nu} \equiv \begin{vmatrix} c_\nu & c_{\nu-1} \ldots\ldots c_{\nu-\mu+1} \\ c_{\nu+1} & c_\nu \ldots\ldots c_{\nu-\mu+2} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{\nu+\mu-1} & c_{\nu+\mu-2} \ldots\ldots c_\nu \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

(в этом определителе коэффициенты с отрицательными индексами считаются равными нулю).

Заметим также, что при любых μ и ν числитель $P_{\mu,\nu}(z)$ интерполяционной дроби $F_{\mu,\nu}(z)$ для функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ может быть получен из знаменателя $Q_{\mu,\nu}(z)$ этой дроби путем простой замены степеней z^p $(p = 0, 1, 2, \ldots, \mu)$ произведениями $z^p \sum_{n=0}^{\nu-p} c_n z^n$ (суммы, для которых $\nu - p < 0$, считаются равными нулю). Поэтому можно ограничиться нахождением формул лишь для знаменателей дробей типа $\Pi(0)$.

2. Падэ [2,3] дал формулы, пригодные для эффективного вычисления интерполяционных дробей типа $\Pi(0)$ для функций e^z и $(1+z)^\alpha$. Эти результаты могут быть обобщены.

Рассмотрим класс (K) функций $\{f(z)\}$, удовлетворяющих условиям:
а) в окрестности нулевой точки

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \tag{4}$$

б) существуют функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и функции двух аргументов t и u $\alpha_t(u)$ и $\beta_t(u)$ такие, что при любом натуральном n

$$c_n = \prod_{x=1}^{n} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \tag{5}$$

и при любых целых x, y, t, для которых $y > x > t \geqslant 0$, выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} \varphi(x-t) & \varphi(y-t) \\ \psi(x) & \psi(y) \end{vmatrix} = \alpha_t(x)\,\beta_t(y-x) \neq 0. \tag{6}$$

К этому классу принадлежат многие известные функции:

$$e^z, \quad \ln(1+z), \quad (1+z)^\alpha, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b^{n^2} z^n, \quad \operatorname{arc\,tg} z,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(a+n+1)}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n z), \quad \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n z)}, \quad A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^n} z^n$$

и др.

Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям (4) — (6), *то*

$$Q_{\mu,\nu}(z) = 1 + \sum_{s=1}^{\mu} (-z)^s \prod_{l=0}^{\lambda-1} \frac{\beta_l(\mu-l)}{\beta_l(\lambda-l)} \prod_{k=1}^{s} \frac{\varphi(m+\lambda+k)}{\psi(m+2\lambda+k)} \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{s-2} \frac{\alpha_{\lambda+k}(m+\mu+\lambda+k)\,\psi(m+2\lambda+2k+1)\,\psi(m+2\lambda+2k+2)}{\psi(m+\mu+\lambda+k)\,\psi(m+\mu+\lambda+k+1)\,\alpha_{\lambda+k}(m+2\lambda+2k+1)} \tag{7}$$

(*здесь* $m = \nu - \mu + 1$, $\lambda = \mu - s$, $\nu \geqslant \mu$, $\prod_{k=p}^{q} u_k \equiv 1$, *если* $p > q$).

Так например, для функции

$$\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)},$$

представимой в виде

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}z^n$$

$$(\varphi(x)=q,\quad \psi(x)=1-q^x,\quad \alpha_t(x)=q^{x+1},\quad \beta_t(u)=1-q^u),$$

получим после несложных выкладок

$$Q_{\mu,\nu}(z)=1+\sum_{s=1}^{\mu}(-1)^s\frac{q^{\frac{s(s+1)}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{s}(1-q^k)}\prod_{k=0}^{s-1}\frac{1-q^{\mu-k}}{1-q^{\mu+\nu-k}}z^s.$$

Для функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}b^{n^2}z^n\quad (\varphi(x)=b^{2x-1},\quad \psi(x)\equiv 1,\quad \alpha_t(x)=b^{2(x-t)-1},\quad \beta_t(u)=1-b^{2u})$$

$$Q_{\mu,\nu}(z)=1+\sum_{s=1}^{\mu}(-1)^s\frac{b^{s(2\nu+1)}\prod\limits_{k=1}^{\mu}(1-b^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{s}(1-b^{2k})\prod\limits_{k=1}^{\mu-s}(1-b^{2k})}z^s.$$

3. Падэ показал, что любая последовательность $\{F_{\mu_n,\nu_n}(z)\}$ дробей типа $\Pi(0)$ для функции e^z сходится к e^z на всей плоскости, если $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_n+\nu_n)=\infty$.

Ниже мы сформулируем аналогичные результаты (полученные методом, отличным от метода Падэ).

Пусть $\{F_{\mu_n,\nu_n}(z)\}$ — какая-либо последовательность смежных дробей с возрастающей суммой индексов таблицы $\Pi(0)$ для функции $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ (т. е. таких, что $\mu_n\leqslant\mu_{n+1}\leqslant\mu_n+1$; $\nu_n\leqslant\nu_{n+1}\leqslant\nu_n+1$; $(\mu_{n+1}-\mu_n)+(\nu_{n+1}-\nu_n)\geqslant 1$). Нетрудно убедиться, что если существует такое N, что в некоторой области G, содержащей точку $z=0$, ряд

$$\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^{\mu_n}\frac{d_{\mu_n+1,\,\nu_n+1}}{d_{\mu_n,\,\nu_n}}\frac{z^{\mu_n+\nu_n+1}}{Q_{\mu_n,\,\nu_n}(z)\,Q_{\mu_{n+1},\,\nu_{n+1}}(z)}$$

сходится равномерно, то последовательность $\{F_{\mu_n,\nu_n}(z)\}$ сходится в G равномерно к $f(z)$.

Можно также показать, что если $f(z)$ — функция класса (K), то при $\nu\geqslant\mu$

$$\frac{d_{\mu+1,\,\nu+1}}{d_{\mu,\,\nu}}=c_{\nu+1}\prod_{k=0}^{\mu-1}\frac{\alpha_k(\nu+k+1)\,\beta_k(\mu-k)}{\psi(\nu+k+1)\,\psi(\nu+k+2)}. \tag{8}$$

Используя эти результаты и соотношение (7), часто удается для многих последовательностей интерполяционных дробей типа $\Pi(0)$

(не обязательно смежных), построенных для какой-либо функции класса (K), установить их сходимость к этой функции.

В частности, верны следующие предложения:

I. *Для каждой из функций:* а) $\sum_{n=0}^{\infty} b^{n^2} z^n$ $(|b|<1)$; б) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)$ $(|q|<1)$; в) $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(a+n+1)}$ $(R(a)\geqslant -1)$ *любая последовательность интерполяционных дробей типа* $\Pi(0)$ $\{F_{\mu_n,\nu_n}(z)\}$ $(\nu_n \geqslant \mu_n,\ \lim\limits_{n\to\infty}\nu_n=\infty)$ *сходится, и притом равномерно во всякой ограниченной области, к интерполируемой функции.*

II. *Для каждой из функций* $\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)}$, $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^n}z^n$ $(|q|)<1)$ *любая последовательность интерполяционных дробей типа* $\Pi(0)$ $\{F_{\mu_n,\nu_n}(z)\}$ $(\nu_n \geqslant \mu_n,\ \lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\infty)$ *сходится к интерполируемой функции равномерно во всякой ограниченной замкнутой области, не содержащей полюсов этой функции.*

4. Пусть $f(z)$ — функция вида

$$A+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{1-\alpha_k z}, \tag{9}$$

удовлетворяющая условиям

$$|\alpha_1|\geqslant|\alpha_2|\geqslant\ldots,\quad |\alpha_k|\neq 0 \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{10}$$

$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — определитель Вандермонда чисел (вообще говоря, комплексных) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

I. *Если* а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|<\infty$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|A_k|<\infty$;

в) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sqrt[n^2]{\frac{\alpha_{n+1}}{V^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\prod\limits_{k=1}^{n}A_k\alpha_k}}\right|<\frac{1}{|\alpha_1|},$$

то главная диагональ таблицы $\Pi(0)$ *для функции* (9) (*т. е. последовательность* $\{F_{n,n}(z)\}$) *сходится к* $f(z)$ *равномерно во всякой ограниченной замкнутой области, не содержащей полюсов этой функции.*

II. *Если помимо условий предыдущей теоремы имеет место соотношение* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\sqrt[n^2]{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}}\right|\leqslant 1$, *то любая диагональ справа от главной диагонали таблицы* $\Pi(0)$ *для функции* $f(z)$ (*т. е. любая последовательность дробей вида* $\{F_{n,m+n}(z)\}$ $(m=\text{const};\ m\geqslant 0)$ *сходится к* $f(z)$ *равномерно во всякой ограниченной замкнутой области, не содержащей полюсов функции* $f(z)$.

В заключение пользуюсь случаем, чтобы выразить свою глубокую признательность члену-корреспонденту АН СССР А. О. Гельфонду за интерес к этой работе и ценные замечания.

Смоленский педагогический учительский институт им. К. Маркса

Поступило 12 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Kap. X, 1929. [2] H. Padé, Ann. de l'Ec. Norm. (3), 16 (1899). [3] H. Padé, C. R., 132 (1901).