

Г. Ф. ХИЛЬМИ

**О ВПОЛНЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМАХ  $n$  ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ**

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 24 V 1951)

1. Настоящая заметка содержит доказательство критерия полной диссипации системы  $n$  тел, притягивающихся по закону Ньютона.

Пусть  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  — материальные точки, массы которых соответственно будут  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$ . Расстояние между точками  $P_i$  и  $P_j$  обозначим через  $r_{ij}$ . Движение этой динамической системы будем описывать в координатах Якоби. Пусть  $x_1, y_1, z_1$  — координаты точки  $P_1$  относительно осей с началом в точке  $P_0$ ;  $x_2, y_2, z_2$  — координаты точки  $P_2$  относительно осей с началом в центре тяжести точек  $P_0$  и  $P_1$  и т. д. и, наконец,  $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$  — координаты точки  $P_{n-1}$  относительно осей с началом в центре тяжести точек  $P_0, P_1, \dots, P_{n-2}$ . Система координат во всех случаях предполагается прямоугольной, а оси параллельными.

Уравнения движения в координатах Якоби имеют вид:

$$\mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad (1)$$

где

$$\mu_i = \frac{(m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}) m_i}{m_0 + m_1 + \dots + m_i}, \quad U = \sum_{ij} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

причем единицы измерения предполагаются такими, при которых постоянная тяготения равна единице.

2. Примем обозначения

$$M' = \sum_{ij} m_i m_j, \quad M'' = \min \left\{ \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \right\}, \quad M = \frac{M'}{M''}$$

и, кроме того, введем функции

$$\rho(t) = \min \{r_{ij}\}, \quad \sigma(t) = \min \left\{ \frac{dr_{ij}}{dt} \right\}.$$

Прежде всего рассмотрим движение точки  $P_1$  по отношению к точке  $P_0$ . Дважды дифференцируя тождество  $r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ , получим

$$r_{01} r_{01}'' + r_{01}'^2 = x_1 x_1'' + y_1 y_1'' + z_1 z_1'' + x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2,$$

а из этого тождества легко получить неравенство

$$r_{01} r_{01}'' \geq x_1 x_1'' + y_1 y_1'' + z_1 z_1''.$$

Пользуясь уравнениями (1), перепишем это неравенство так:

$$r_{01} r''_{01} \geq \frac{1}{\mu_1} \left( x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial U}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial U}{\partial z_1} \right).$$

Обозначим через  $l$  направление прямой, соединяющей точку  $P_0$  с точкой  $P_1$ . Тогда последнее неравенство можно записать в следующем виде:

$$r''_{01} \geq \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial U}{\partial l}. \quad (2)$$

Дифференцируя потенциальную функцию  $U$  по направлению  $l$  найдем

$$\frac{\partial U}{\partial l} = - \sum_{ij} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\partial r_{ij}}{\partial l}.$$

Из простых геометрических соображений следует, что

$$\left| \frac{\partial r_{ij}}{\partial l} \right| \leq 1,$$

поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial l} \geq - \sum_{ij} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}.$$

Принимая во внимание, что в каждый момент времени  $r_{ij} \geq \rho$  и учитывая указанные выше значения  $\mu_1$  и  $M$ , получим

$$r''_{01} \geq - \frac{M}{\rho^2}. \quad (3)$$

Дважды интегрируя это неравенство по времени в пределах от 0 до  $t > 0$ , получим

$$r_{01}(t) \geq r_{01}(0) + r'_{01}(0)t - \int_0^t \int_0^t \frac{M}{\rho^2} dt dt,$$

а отсюда следует также, что

$$r_{01}(t) \geq \rho(0) + \sigma(0)t - \int_0^t \int_0^t \frac{M}{\rho^2} dt dt.$$

Мы получили это неравенство, рассматривая движение точки  $P_1$  относительно  $P_0$ . Но мы можем рассматривать движение любой точки  $P_j$  относительно любой точки  $P_i$ ; поэтому справедлива следующая система неравенств:

$$r_{ij}(t) \geq \rho(0) + \sigma(0)t - \int_0^t \int_0^t \frac{M}{\rho^2} dt dt.$$

Так как в каждый момент времени  $\rho(t)$  совпадает по крайней мере с одним из расстояний  $r_{ij}$ , то

$$\rho(t) \geq \rho(0) + \sigma(0)t - \int_0^t \int_0^t \frac{M}{\rho^2} dt dt. \quad (4)$$

3. Применим выведенное неравенство к доказательству следующей теоремы.

Теорема. Если для гравитирующих тел  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  в начальный момент времени  $t = 0$  выполняются условия

$$\sigma(0) > 0, \quad \sigma^2(0) > \frac{8M}{\rho(0)}, \quad (5)$$

то  $\rho(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , т. е. взаимные расстояния между телами неограниченно возрастают.

Рассмотрим поведение функции  $\rho(t)$ , удовлетворяющей интегральному неравенству (4) и условиям (5).

Из (5) имеем

$$\frac{\sigma(0)}{2} - \frac{4M}{\rho(0)\sigma(0)} > 0,$$

а тогда при всяком  $t > 0$

$$\frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}t - \frac{4M}{\rho(0)\sigma(0)}t + \frac{4M}{\sigma^2(0)} \ln \left( 1 - \frac{\sigma(0)}{\rho(0)}t \right) > 0. \quad (6)$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^t \int_0^t \frac{M dt dt}{\left( \frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}t \right)^2} = \frac{4M}{\rho(0)\sigma(0)}t - \frac{4M}{\sigma^2(0)} \ln \left( 1 + \frac{\sigma(0)}{\rho(0)}t \right),$$

мы можем неравенство (6) представить в виде

$$\frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}t - \int_0^t \int_0^t \frac{M dt dt}{\left( \frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}t \right)^2} > 0. \quad (7)$$

Так как  $\rho(0) > 0$ , то по крайней мере для достаточно малых значений  $t$  выполняется неравенство

$$\rho(t) > \frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}t. \quad (8)$$

Момент времени  $t$  назовем регулярным, если при всех  $t'$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 \leq t' \leq t$ , выполняется условие (8). Обозначим через  $Q$  множество всех регулярных моментов времени. Пусть  $\tau = \sup Q$ , если множество  $Q$  ограничено, и пусть  $\tau = \infty$  в противном случае. Допустим, что  $\tau$  имеет конечное значение, тогда

$$\rho(t) > \frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}t, \quad \text{если } 0 \leq t < \tau; \quad (9)$$

$$\rho(\tau) = \frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}\tau. \quad (10)$$

С другой стороны, в силу неравенства (7) имеем

$$\frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}\tau - \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{M dt dt}{\left( \frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}t \right)^2} > 0, \quad (11)$$

а тогда из (9), (10), (11) следует

$$\frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}\tau - \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{M}{\rho^2} dt dt > 0. \quad (12)$$

Написав неравенство (4) в виде

$$\rho(t) \geq \frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}t + \left\{ \frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}t - \int_0^t \int_0^t \frac{M}{r^2} dt dt \right\}$$

и рассматривая его для момента  $\tau$ , мы из него и неравенства (12) получим

$$\rho(\tau) > \frac{\rho(0)}{2} + \frac{\sigma(0)}{2}\tau.$$

Но это противоречит равенству (10) и, следовательно,  $\tau = \infty$ . А тогда при всех  $t > 0$  выполняется неравенство (8) и

$$\rho(t) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что доказанная теорема, сформулированная надлежащим образом, справедлива и для  $t \rightarrow -\infty$ . Такой случай представляет особый интерес в проблеме трех тел. Применительно к задаче трех тел мы имеем следующее. Если в момент времени  $t = 0$

$$\sigma(0) < -\sqrt{\frac{8M}{\rho(0)}},$$

то все три взаимные расстояния между телами неограниченно возрастают при  $t \rightarrow -\infty$ . Мы получаем критерий того, что для любых двух из трех рассматриваемых тел мы не имели в прошлом, вплоть до данного момента времени, явлений захвата, и в этом смысле их движения были независимыми. В примере захвата, указанном О. Ю. Шмидтом<sup>(1)</sup>, этот критерий выполнен для состояния трех тел, предшествующего захвату.

Геофизический институт  
Академии наук СССР

Поступило  
15 V 1951

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> О. Ю. Шмидт, ДАН, 58, № 2 (1947).