Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Г. КОРЕНЕВ

ОБ ИЗГИБЕ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, НАГРУЗКАМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ПРЯМОЙ И ПРЯМОУГОЛЬНИКУ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 24 V 1951)

В этой заметке рассматриваются некоторые задачи об изгибе неограниченной плиты, лежащей на упругом основании, нагрузкой, распределенной по площади прямоугольника, по прямой и по отрезку прямой.

В предыдущей заметке ([1]) было приведено решение задачи об изгибе неограниченной плиты, загруженной вертикальными силами $q=\sum\sum a_{mn}\cos\alpha_m x\cos\beta_n y$ и равномерными растягивающими усилиями p_0, действующими в срединной плоскости, которое имеет следующий вид:

$$w=\sum\sum\frac{a_{mn}c_{mn}\cos\alpha_m x\cos\beta_n y}{1+p_0c_{mn}(\alpha_m^2+\beta_n^2)+c_{mn}D(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}, \tag{1}$$

где $c_{mn}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\sqrt{x^2+y^2})\cos\alpha_m x\cos\beta_n y\,dx\,dy$; $K\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)$ — ядро, зависящее от свойств упругого основания; D — цилиндрическая жесткость.

Рассмотрим плиту, нагруженную нагрузкой q, равномерно распределенной по площади прямоугольника со сторонами $2a$, $2b$, примем начало координат в середине прямоугольника, ось x направим параллельно стороне, имеющей длину $2a$.

Переходя от (1) к интегралу Фурье и взяв значения a_{mn}, соответствующие заданной нагрузке, получим

$$w=\frac{4q}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{c\sin\alpha a\sin\beta b\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta}{\alpha\beta\left[1+p_0c(\alpha^2+\beta^2)+cD(\alpha^2+\beta^2)^2\right]}. \tag{2}$$

Для плиты, лежащей на упругом полупространстве,

$$c=\frac{2(1-\nu^2)}{E}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

где E — модуль деформации и ν — отношение Пуассона для упругого полупространства, и поэтому в этом случае (2) принимает вид

$$w = \frac{8q(1-\nu^2)}{\pi^2 E} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \alpha a \sin \beta b \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta}{\alpha\beta \left[1 + \frac{2p_0(1-\nu^2)}{E}(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} + \frac{2(1-\nu^2)D}{E}(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}\right]\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \tag{3}$$

Если на основании, описываемом ядром K, лежит система пружин с квази-упругим коэффициентом k_0, то для такой комбинированной модели (2) примет вид

$$w = \frac{4q}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\left(c + \frac{1}{k_0}\right) \sin \alpha a \sin \beta b \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta}{\alpha\beta \left[1 + p_0\left(c + \frac{1}{k_0}\right)(\alpha^2+\beta^2) + \left(c + \frac{1}{k_0}\right) D (\alpha^2+\beta^2)^2\right]}. \tag{4}$$

Положив в (4) $c = 0$, $p_0 = 0$, мы получаем решение задачи о плите, лежащей на основании, упругом в смысле гипотезы коэффициента постели, данное С. С. Голушкевичем ([2]).

Здесь будет уместно сделать одно замечание; для многих частных случаев нагрузок получены решения задач об изгибе плиты, лежащей на основании, упругом в смысле гипотезы коэффициента постели; эти решения можно представить в виде ряда

$$w = \sum\sum \frac{a_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y}{k_0 + D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}. \tag{5}$$

Сравнивая этот ряд с (1) и заменяя в (1) c на $c + \frac{1}{k_0}$, получим, что переход от задачи об изгибе плиты, лежащей на основании, упругом в смысле гипотезы коэффициента постели, к задаче о плите на упругом комбинированном основании сводится к тому, чтобы в рядах типа (5) заменить знаменатель на следующую величину:

$$\frac{1}{c + \frac{1}{k_0}} + p_0(\alpha_m^2 + \beta_n^2) + D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2. \tag{6}$$

Если решение представлено с помощью интеграла Фурье, то при замене знаменателя на (6) опускаются индексы m, n; т. е., если решение задачи при гипотезе коэффициента постели имеет вид

$$w = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta}{k_0 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \tag{7}$$

то для комбинированной модели основания

$$w = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta}{\frac{1}{c + \frac{1}{k_0}} + p_0(\alpha^2+\beta^2) + D(\alpha^2+\beta^2)^2}. \tag{8}$$

Рассмотрим задачу об изгибе плиты силами, изменяющимися по закону $\psi(y) \cos \alpha x = \cos \alpha x \sum_0^\infty a_n \cos \beta_n y$; решение этой задачи для комбинированного основания имеет вид

$$w = \sum_0^\infty \frac{a_n\left(c_n + \frac{1}{k_0}\right) \cos \alpha x \cos \beta_n y}{1 + p_0\left(c_n + \frac{1}{k_0}\right)(\alpha^2 + \beta_n^2) + c_n D(\alpha^2 + \beta_n^2)^2 + \frac{D}{k_0}(\alpha^2 + \beta_n^2)^2}. \tag{9}$$

Перейдем к частному случаю этой задачи. Положив, что при $b > y > -b$ $\psi(y) = q$, а при $\infty > y > b$ и $-b > y > -\infty$ $\psi(y) = 0$, переходя к интегралу Фурье, получим

$$w = \frac{2q\cos\alpha x}{\pi}\int_0^\infty \frac{\left(c+\frac{1}{k_0}\right)\sin\beta b\,\cos\beta y\,d\beta}{\beta\left[1+p_0\left(c+\frac{1}{k_0}\right)(\alpha^2+\beta^2)+D\left(c+\frac{1}{k_0}\right)(\alpha^2+\beta^2)^2\right]}; \qquad (10)$$

отсюда простым предельным переходом получаем решение задачи о плите, нагруженной по прямой $y = 0$ силами $P\cos\alpha x$, в виде

$$w = \frac{P}{\pi}\cos\alpha x\int_0^\infty \frac{\cos\beta y\,d\beta}{\frac{1}{c+\frac{1}{k_0}}+p_0(\alpha^2+\beta^2)+D(\alpha^2+\beta^2)^2}. \qquad (11)$$

Если на прямой $y = 0$ действует нагрузка $P(x) = \Sigma P_m\cos\alpha_m x$, то

$$w = \frac{1}{\pi}\sum P_m\cos\alpha_m x\int_0^\infty \frac{\cos\beta y\,d\beta}{\frac{1}{c_m+\frac{1}{k_0}}+p_0(\alpha_m^2+\beta^2)+D(\alpha_m^2+\beta^2)^2}. \qquad (12)$$

Рассмотрим задачу о плите, загруженной нагрузкой P, равномерно распределенной по отрезку длиной $2a$, начало координат принимаем в середине отрезка; в этом случае, переходя от ряда (12) к интегралу Фурье, будем иметь

$$w = \frac{2P}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin\alpha a\cos\alpha x\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta}{\alpha\left\{\frac{1}{c+\frac{1}{k_0}}+p_0(\alpha^2+\beta^2)+D(\alpha^2+\beta^2)^2\right\}}. \qquad (13)$$

Остановимся несколько подробнее на более частной задаче об изгибе балки бесконечной длины, лежащей на упругом основании и загруженной сосредоточенной силой; решение этой задачи получим, положив в (11) $\alpha = 0$, что соответствует изгибу плиты по цилиндрической поверхности

$$w = \frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\beta y\,d\beta}{\frac{1}{c+\frac{1}{k_0}}+p_0\beta^2+D\beta^4}. \qquad (14)$$

Рассмотрим плиту, лежащую на упругом полупространстве, положив в (14) $p_0 = 0$, $k_0 = \infty$, $c = \frac{2(1-\nu^2)}{E}\frac{1}{\beta}$; тогда

$$w = \frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\beta y\,d\beta}{\frac{E\beta}{2(1-\nu^2)}+D\beta^4}. \qquad (15)$$

Последняя задача впервые была решена Н. М. Герсевановым и Я. А. Мачеретом ([3]); решение в форме (15), но в иных обозначениях и другим путем получено И. Г. Альпериным ([4]), а также М. Я. Леоновым ([5, 6]). Во все решения, приведенные выше, входила функция $c(\alpha, \beta)$, которая известна для некоторых моделей основания и которую можно получить, если известно ядро K.

Рассмотрим определение $c(\alpha, \beta)$ для одной довольно важной в приложениях частной модели, а именно для изотропного полупространства, у которого модуль упругости изменяется с глубиной z по показательному закону $E = E_0 e^{\gamma z}$. В этом случае к границе неоднородного полупространства нужно приложить нормальные силы, меняющиеся по периодическому закону, и найти перемещения w на границе. Решая задачу в перемещениях, мы будем иметь уравнения Ламе, в которые войдут не только упругие постоянные, но и их производные; то же относится к уравнениям Бельтрами при решении задачи в напряжениях; в рассматриваемом частном случае, так как упругие постоянные изменяются по показательному закону, то упомянутые дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты; воспользовавшись уравнениями, полученными ранее автором, можно для плоской задачи получить выражение для $c(\alpha)$ в следующем виде:

$$c(\alpha) = \frac{1}{E_0} \frac{2\alpha^3 + (1-\nu)\alpha^2\gamma - \frac{(1+\nu)\nu}{4}\gamma^2}{\alpha^2\left(\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \frac{5+\nu}{4}\gamma^2\right)}; \tag{16}$$

в основу вывода этой формулы положено приближенное решение характеристического уравнения, которое получается при решении обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка с постоянными коэффициентами, следующего из уравнения совместности.

В заключение заметим, что если в полученных формулах положить $D=0$, то мы перейдем к решениям задачи о мембране, лежащей на упругом основании. Например, уравнение упругой поверхности мембраны, лежащей на комбинированном упругом основании и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q, действующей по площади прямоугольника со сторонами $2a$, $2b$, получим из (4) в следующем виде

$$w = \frac{4q}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\left(c + \frac{1}{k_0}\right) \sin \alpha a \sin \beta b \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta}{\alpha\beta \left[1 + p_0(\alpha^2 + \beta^2)\left(c + \frac{1}{k_0}\right)\right]}. \tag{17}$$

Если мембрана нагружена силами, распределенными по круговым областям, то решение получим, положив в формулах ([1]) $D = 0$.

Центральный научно-исследовательский институт промышленных сооружений

Поступило 11 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Г. Коренев, ДАН, 78, № 3 (1951). [2] С. С. Голушкевич, О некоторых задачах теории изгиба ледяного покрова, 1947. [3] Н. М. Герсеванов и Я. А. Мачерет, Гидротехническое строительство, № 10 (1935). [4] И. Г. Альперин, Прикладн. матем. и мех., 2, в. 3 (1939). [5] М. Я. Леонов, там же, 3, в. 3 (1939). [6] М. Я. Леонов, там же, 4, в. 3 (1940).

ПОПРАВКА

В заметке ([1]) в формуле (4) в знаменатель входит выражение $p_0(\alpha^2 + \beta^2)$, которое надо читать так: $p_0 c(\alpha^2 + \beta^2)$; сомножитель c (или, соответственно, C) опущен и в последующих формулах.