Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Р. А. АДАДУРОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЧЕТЫРЕХПОЯСНОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КОРОБКЕ, ЗАГРУЖЕННОЙ НА ТОРЦАХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 19 V 1951)

Рассматривается призматическая коробка с замкнутым прямоугольным контуром поперечного сечения, образованная безмоментными ортотропными гранями и четырьмя одинаковыми абсолютно гибкими на изгиб продольными поясами, расположенными в углах. Коробка подкреплена по всей длине непрерывно расположенными поперечными прямоугольными рамами, сопротивляющимися изгибу в своей плоскости и абсолютно гибкими в перпендикулярном направлении. Контур рамы предполагается нерастяжимым. Противоположные грани коробки имеют одинаковые толщины и одинаковые упругие свойства. Противоположные элементы поперечных рам также одинаковы. Вследствие этого поперечные сечения коробки, отнесенной к прямоугольной системе координат xyz, имеют две оси симметрии y, z.

На каждом из торцов коробки $x=0$ и $x=l$ приложена кососимметричная система нагрузок, статически эквивалентная нулю; на торцах горизонтальных граней ($z=\pm b$) нормальные напряжения $\sigma_{x,a}(0, s)$, $\sigma_{x,a}(l, s)$, срезающие усилия $Q_a(0)$ и $Q_a(l)$; на торцах вертикальных граней ($y=\pm a$) нормальные напряжения $\sigma_{x,b}(0, s)$, $\sigma_{x,b}(l, s)$, срезающие усилия $Q_b(0)$ и $Q_b(l)$ и в концевых сечениях поясов продольные усилия $P(0)$ и $P(l)$. Координата s отсчитывается вдоль контура поперечного сечения от середины каждой грани.

При таком загружении система напряжений в каждом поперечном сечении коробки будет системой, статически эквивалентной нулю, и деформации коробки будут кососимметричными относительно осей yz.

§ 1. Нормальные и касательные напряжения $\sigma_{x,j}(x, s)$, $\sigma_{s,j}(x, s)$ и $\tau_j(x, s)$ в ортотропных гранях коробки связаны с продольными смещениями $u_j(x, s)$ и смещениями $v_j(x, s) = v_j(x)$, направленными вдоль нерастяжимого контура, зависимостями:

$$\sigma_{x,j} = \frac{G_j}{\vartheta_j^2}\frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad \sigma_{s,j} = \mu_{x,j}\sigma_{x,j}, \quad \tau_j = G_j\left[\frac{\partial u_j}{\partial s} + v_j'(x)\right], \tag{1}$$

$$\vartheta_j^2 = \frac{G_j}{E_{x,j}}(1-\mu_{x,j}\mu_{s,j}), \quad E_{x,j}\mu_{x,j} = E_{s,j}\mu_{s,j}; \tag{2}$$

$E_{x,j}$, $E_{s,j}$ — модули упругости материалов граней по направлениям x и s; G_j — модуль сдвига; $\mu_{x,j}$ и $\mu_{s,j}$ — коэффициенты Пуассона. Здесь и далее j принимает соответственно для горизонтальных и вертикальных граней значения a и b.

Уравнения равновесия элементов граней в проекциях на ось x на основании (1) будут:

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + \vartheta_a^2 \frac{\partial^2 u_a}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} + \vartheta_b^2 \frac{\partial^2 u_b}{\partial s^2} = 0; \tag{3}$$

при этом

$$u_a(x, -s) = -u_a(x, s), \quad u_b(x, -s) = -u_b(x, s), \tag{4}$$
$$u_a(x, a) = -u_b(x, b) = u_n(x);$$

здесь $u_n(x)$ — продольные смещения точек пояса.

Срезающие усилия в гранях $Q_a(x)$ и $Q_b(x)$ могут быть заданы в виде

$$Q_a(x) = \int_{-a}^{+a} \tau_a(x, s)\, \delta_a ds = \frac{a+b}{b} Q(x),$$
$$Q_b(x) = \int_{-b}^{+b} \tau_b(x, s)\, \delta_b ds = -\frac{a+b}{a} Q(x); \tag{5}$$

здесь δ_a и δ_b — толщины горизонтальных и вертикальных граней.

Внося в (5) выражение для τ согласно (1) и используя (4), найдем:

$$v'_a(x) = \frac{a+b}{2ab} \frac{Q(x)}{G_a \delta_a} - \frac{u_n(x)}{a}, \quad v'_b(x) = -\frac{a+b}{2ab} \frac{Q(x)}{G_b \delta_b} + \frac{u_n(x)}{b}. \tag{6}$$

Смещения $v_a(x)$ и $v_b(x)$ могут быть заданы в виде:

$$v_a(x) = \frac{a+b}{a} v(x) + b\theta(x), \quad v_b(x) = -\frac{a+b}{b} v(x) + a\theta(x). \tag{7}$$

Здесь $\theta(x)$ — угол поворота поперечного сечения.

Из (6) и (7) следуют соотношения:

$$\theta'(x) = \frac{a+b}{4a^2b^2} \left(\frac{a}{G_a \delta_a} - \frac{b}{G_b \delta_b} \right) Q(x), \tag{8}$$

$$v'(x) = \frac{1}{4ab} \left(\frac{a}{G_a \delta_a} + \frac{b}{G_b \delta_b} \right) Q(x) - \frac{1}{a+b} u_n(x). \tag{9}$$

Уравнение равновеси элемента пояса имеет вид:

$$\frac{dP}{dx} = \tau_a(x, a)\, \delta_a - \tau_b(x, -b)\, \delta_b, \quad P(x) = E_n F_n \frac{du_n}{dx}, \tag{10}$$

где $E_n F_n$ — жесткость пояса на растяжение (сжатие).

Внося сюда значение τ согласно (1) и используя (6), получим:

$$Q(x) = \frac{ab}{a+b} \left[E_n F_n \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \left(\frac{G_a \delta_a}{a} + \frac{G_b \delta_b}{b} \right) u_n(x) - \right.$$
$$\left. - \left(G_a \delta_a \frac{\partial u_a}{\partial s}\bigg|_{s=a} - G_b \delta_b \frac{\partial u_b}{\partial s}\bigg|_{s=-b} \right) \right]. \tag{11}$$

Уравнение деформаций поперечной рамы имеет вид:

$$v(x) = \frac{a v_a(x) - b v_b(x)}{2(a+b)} = \frac{ab}{12} \left(\frac{a}{E_a J_a} + \frac{b}{E_b J_b} \right) \frac{dQ}{dx}; \tag{12}$$

$E_a J_a$ и $E_b J_b$ — жесткости изгиба горизонтальной и вертикальной сторон рамы на единицу длины коробки.

Исключая $\theta(x)$, $v(x)$ и $Q(x)$ из (8), (9), (11) и (12), придем к уравнению:

$$\frac{E_nF_n}{G_aG_b\delta_a\delta_b}\frac{d^4u_n}{dx^4}+\vartheta_a^2\vartheta_b^2\beta^2\left(\alpha^2-\frac{E_nF_n}{G_aG_b\delta_a\delta_b}\right)\frac{d^2u_n}{dx^2}-\vartheta_a^4\vartheta_b^4\gamma^2u_n(x)-$$
$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}-\vartheta_a^2\vartheta_b^2\beta^2\right)\left(\frac{1}{G_b\delta_b}\frac{\partial u_a}{ds}\bigg|_{s=a}-\frac{1}{G_a\delta_a}\frac{\partial u_b}{\partial s}\bigg|_{s=-b}\right)=0; \qquad (13)$$

здесь:

$$\alpha^2=\frac{1}{3}ab\left(\frac{a}{E_aJ_a}+\frac{b}{E_bJ_b}\right),\quad \beta^2=\frac{1}{\alpha^2\vartheta_a^2\vartheta_b^2ab}\left(\frac{a}{G_a\delta_a}+\frac{b}{G_b\delta_b}\right),$$
$$\gamma=\frac{1}{\alpha\vartheta_a^2\vartheta_b^2ab}\left(\frac{a}{G_a\delta_a}-\frac{b}{G_b\delta_b}\right). \qquad (14)$$

Таким образом, задача о напряженном состоянии коробки сводится к совместному решению уравнений (3) при условиях (4) и (13).

§ 2. Решение уравнений (3), при условиях (4), будет:

$$u_a(x, s)=X(x)S_a(s),\quad u_b(x, s)=X(x)S_b(s),$$
$$S_a(s)=A\sin\lambda\vartheta_b s,\quad S_b(s)=B\sin\lambda\vartheta_a s, \qquad (15)$$

при этом

$$A\sin\lambda\vartheta_b a+B\sin\lambda\vartheta_a b=0, \qquad (16)$$
$$u_n(x)=X(x)S_n,\quad S_n=S_a(a)=-S_b(b). \qquad (17)$$

Функция $X(x)$ имеет вид:

$$X(x)=Ce^{\lambda\vartheta_a\vartheta_b x}+De^{-\lambda\vartheta_a\vartheta_b x}. \qquad (18)$$

Здесь постоянные A, B, C, D и параметр λ подлежат определению.

Решение (15) должно удовлетворять уравнению (13). Внося (15), (16), (17) и (18) в (13), получим:

$$\frac{\vartheta_a^2\vartheta_b^2}{2}(A\sin\lambda\vartheta_b a-B\sin\lambda\vartheta_a b)\left[\frac{E_nF_n}{G_aG_b\delta_a\delta_b}\lambda^2(\lambda^2-\beta^2)+\alpha^2\beta^2\lambda^2-\gamma^2\right]-$$
$$-\lambda(\lambda^2-\beta^2)\left(A\frac{\vartheta_b}{G_b\delta_b}\cos\lambda\vartheta_b a-B\frac{\vartheta_a}{G_a\delta_a}\cos\lambda\vartheta_a b\right)=0. \qquad (19)$$

Система уравнений (16) и (19) дает для A и B значения, отличные от нуля при условии равенства нулю ее определителя $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda)=\sin\lambda\vartheta_b a\sin\lambda\vartheta_a b\left[\lambda(\lambda^2-\beta^2)\left(\frac{\vartheta_a}{G_a\delta_b}\operatorname{ctg}\lambda\vartheta_a b+\frac{\vartheta_b}{G_b\delta_b}\operatorname{ctg}\lambda\vartheta_b a-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\lambda E_nF_n\frac{\vartheta_a^2}{G_a\delta_a}\frac{\vartheta_b^2}{G_b\delta_b}\right)-\vartheta_a^2\vartheta_b^2(\alpha^2\beta^2\lambda^2-\gamma^2)\right]=0. \qquad (20)$$

Уравнением (20) определяется бесконечная последовательность собственных чисел λ: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ Следовательно, определяется и бесконечная последовательность собственных функций $S_k(s)=S(s, \lambda_k)$, ортогональных на отрезке контура, заключенного между осями y и z. Постоянные A и B при этом определяются с точностью до множителя, выбираемого так, чтобы система $S(s, \lambda_k)$ была нормированной. Условие ортонормированности имеет вид:

$$\frac{G_a\delta_a}{\vartheta_a^2}\int_0^a S_a(\lambda_q)S_a(\lambda_k)\,ds+\frac{G_b\delta_b}{\vartheta_b^2}\int_{-b}^0 S_b(\lambda_q)S_b(\lambda_k)\,ds+E_nF_nS_n(\lambda_q)S_n(\lambda_k)-$$
$$-\frac{4}{\alpha^2\vartheta_a^4\vartheta_b^4ab}\frac{S_n(\lambda_q)}{\lambda_q^2-\beta^2}\frac{S_n(\lambda_k)}{\lambda_k^2-\beta^2}=\begin{cases}0, & q\neq k;\\ 1, & q=k.\end{cases} \qquad (21)$$

Выражения для смещений, угла поворота и усилий $Q(x)$ будут.

$$u_a(x, s) = \sum_{k=1}^{k=\infty} X_k(x) S_a(s, \lambda_k), \quad u_b(x, s) = \sum_{k=1}^{k=\infty} X_k(x) S_b(s, \lambda_k),$$

$$\theta(x) = \theta(0) - \frac{\gamma}{\alpha\vartheta_a^2\vartheta_b^2 ab} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{X_k'(x) - X_k'(0)}{\lambda_k^2} \frac{S_n(\lambda_k)}{\lambda_k^2 - \beta^2}, \tag{22}$$

$$Q(x) = -\frac{4}{\alpha^2\vartheta_a^2\vartheta_b^2(a+b)} \sum_{k=1}^{k=\infty} X_k(x) \frac{S_n(\lambda_k)}{\lambda_k^2 - \beta^2}.$$

На основании (21) из (22) следует:

$$f_k(x) + \frac{4}{\alpha\gamma\vartheta_a^4\vartheta_b^4} \theta'(x) \frac{S_n(\lambda_k)}{\lambda_k^2 - \beta^2} = X_k(x), \tag{23}$$

$$f_k'(x) + \frac{1}{\vartheta_a^2\vartheta_b^2} \frac{a+b}{ab} Q'(x) \frac{S_n(\lambda_k)}{\lambda_k^2 - \beta^2} = X_k'(x); \tag{24}$$

здесь:

$$f_k(x) = \frac{G_a\delta_a}{\vartheta_a^2} \int_0^a u_a(x, s) S_a(s, \lambda_k)\, ds + \frac{G_b\delta_b}{\vartheta_b^2} \int_{-b}^0 u_b(x, s) S_b(s, \lambda_k)\, ds +$$

$$+ E_n F_n u_n(x) S_n(\lambda_k). \tag{25}$$

§ 3. Определим постоянные C и D в выражении (18) для $X(x)$. Рассмотрим случай, когда на торцах $x = 0$ и $x = l$ заданы напряжения $\sigma_{x,a}(x, s)$, $\sigma_{x,b}(x, s)$ и усилия $P(x)$ и $Q(x)$. Из (18) находим:

$$C_k = \frac{X_k'(l) - X_k'(0)\, e^{-\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b l}}{2\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b \operatorname{sh}\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b l}, \quad D_k = \frac{X_k'(l) - X_k'(0)\, e^{+\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b l}}{2\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b \operatorname{sh}\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b l}; \tag{26}$$

здесь X_k' определяются через f_k' и Q' по формуле (24). Величины $f_k'(0)$ и $f_k'(l)$, определяемые формулой (25), известны, так как напряжения $\sigma_{x,j}(x, s)$ и усилия в поясах $P(x)$ на торцах заданы. Величины $Q'(0)$ и $Q'(l)$ неизвестны; внося значения C_k и D_k (26) в выражения для $Q(0)$ и $Q(l)$, полученные по формуле (22), найдем их в виде:

$$Q'(x^*) = \frac{ab}{a+b} \frac{\vartheta_a^2\vartheta_b^2}{L_1^2 - L_2^2} \Bigg\{(-1)^{x^*/l} \frac{1}{4} \alpha^2\vartheta_a^3\vartheta_b^3(a+b)\,[L_1 Q(x^*) - L_2 Q(l - x^*)] -$$

$$- \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\lambda_k \operatorname{sh}\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b l} \Big[(L_1 \operatorname{ch}\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b l - L_2)\, f_k'(x^*) -$$

$$- (L_1 - L_2 \operatorname{ch}\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b l)\, f_k'(l - x^*)\Big] \frac{S_n(\lambda_k)}{\lambda_k^2 - \beta^2}\Bigg\}, \tag{27}$$

$$L_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\lambda_k \operatorname{th}\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b l} \frac{S_n^2(\lambda_k)}{(\lambda_k^2 - \beta^2)^2}, \quad L_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{\lambda_k \operatorname{sh}\lambda_k\vartheta_a\vartheta_b l} \frac{S_n^2(\lambda_k)}{(\lambda_k^2 - \beta^2)^2};$$

здесь $x^* = 0, l$. Постоянные C_k и D_k таким образом определяются.

Аналогично могут быть рассмотрены: случай, когда на обоих торцах коробки заданы смещения, и случай, когда на одном из торцов заданы напряжения и усилия, а на другом — смещения.

Поступило
10 IV 1951