Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Ю. ХАРРИК

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННОЙ С ИССЛЕДОВАНИЕМ СХОДИМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 VII 1951)

В связи с исследованием сходимости вариационных процессов возникает следующая общая проблема, относящаяся к конструктивной теории функций (см. ([1]) гл. IV, § 2).

Пусть D — замкнутая область двумерного пространства, ограниченная контуром Γ, заданным уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Каков возможный порядок аппроксимации функции $u(x, y)$, заданной в области D, обращающейся в нуль на контуре Γ и удовлетворяющей некоторым условиям, посредством функций вида $\varphi(x, y) P_n(x, y)$, где $P_n(x, y)$ — полином степени не выше n относительно каждого из переменных?

В настоящей работе устанавливаются некоторые частные результаты, относящиеся к этой проблеме, и указывается их применение к исследованию порядка сходимости метода Ритца.

Если $u(x, y)$ — функция, определенная и непрерывная в области D, обращающаяся в нуль на контуре Γ, и α и β — вещественные числа, то будем обозначать через $u^{\alpha, \beta}(x, y)$ функцию, заданную следующим образом:

$$u^{\alpha, \beta}(x, y) = \begin{cases} u(x+\alpha;\ y+\beta), & \text{если } (x+\alpha;\ y+\beta) \in D, \\ 0, & \text{если } (x+\alpha;\ y+\beta) \overline{\in} D. \end{cases}$$

Обозначая через E любое из пространств C или L_p $(p \geqslant 1)$ функций двух переменных, определенных в области D, полагаем

$$\omega_E(u, t) = \sup_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqslant t} \| u^{\alpha, \beta} - u \|_E .$$

Теорема 1. *Пусть D есть замкнутая область двумерного пространства, ограниченная контуром Γ, и $\varphi(x, y)$ — функция, определенная в некоторой открытой области, содержащей D, удовлетворяющая условиям: 1) $\varphi(x, y) = 0$ на контуре Γ; 2) $\varphi(x, y) > 0$ внутри области D; 3) $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируема в точках области D; 4) $|\operatorname{grad} \varphi(x, y)| > 0$ на контуре Γ.*

Тогда, если функция $u(x, y)$, определенная и непрерывная в области D, обращается в нуль на контуре Γ, то можно указать последовательность полиномов $P_n(x, y)$ (степени не выше n относительно каждого из переменных) и число A, удовлетворяющие условию:

$$\| u - \varphi P_n \|_C \leqslant A \omega_C\left(u; \frac{1}{n}\right).$$

При этом число A зависит лишь от функции $\varphi(x, y)$.

Теорема 2. *Пусть D, Γ и $\varphi(x, y)$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1, и, кроме того, $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ удовлетворяют условию Липшица в области D.*

Тогда, если функция $u(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области D и обращается в нуль на контуре Γ, то можно указать последовательность полиномов $Q_n(x, y)$ (степени не выше n) и число A, удовлетворяющие условиям:

а) $\|u - \varphi Q_n\|_L \leqslant \frac{A}{n}\left[\omega_L\left(u'_x; \frac{1}{n}\right) + \omega_L\left(u'_y; \frac{1}{n}\right) + \frac{\ln n}{n}\right]$;

б) $\|u - \varphi Q_n\|_{L_p} \leqslant \frac{A}{n}\left[\omega_{L_p}\left(u'_x; \frac{1}{n}\right) + \omega_{L_p}\left(u'_y; \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}\right]$.

Будем считать в дальнейшем область D заключенной внутри прямоугольника $(-1;\ 1;\ -1;\ 1)$.

Введем следующие обозначения и определения:

1°. Обозначим через $F_n(\alpha)$ ядро Джексона:

$$F_n(\alpha) = \frac{3}{2\pi k(2k^2+1)}\left[\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right]^4, \quad \text{где } k = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

и определим полиномы Джексона 2π-периодической суммируемой функции $f(x, y)$ следующим образом:

$$T_n(f;\ (x, y)) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha,\ y+\beta)\, F_n(\alpha)\, F_n(\beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

2°. Пусть $f(x, y)$ есть функция, определенная и непрерывная в прямоугольнике $[-1, 1, -1, 1]$. Построим последовательность полиномов $R_n(f;\ (x, y))$. Для этого рассмотрим функцию $\tilde{f}(\xi;\ \eta) = f(\cos\xi;\ \cos\eta)$. Так как $\tilde{f}(\xi, \eta)$ является четной 2π-периодической функцией, тригонометрические полиномы, являющиеся ее полиномами Джексона, могут быть представлены как полиномы степени $\leqslant n$ от $\cos\xi$ и $\cos\eta$, т. е.

$$T_n(\tilde{f};\ (\xi, \eta)) = \sum_{r,\, s=0}^{n} a_{r,s}^{(n)} (\cos\xi)^r (\cos\eta)^s.$$

Положим

$$R_n(f;\ (x, y)) = \sum_{r,\, s=0}^{n} a_{r,s}^{(n)} x^r y^s.$$

3°. При каждом $\sigma > 0$ определим вспомогательную дифференцируемую функцию $\Phi_\sigma(t)$ так, чтобы

$$\Phi_\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant \sigma, \\ t & \text{при } t \geqslant 2\sigma, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \Phi'_\sigma(t) \leqslant 3.$$

4°. Полагаем

$$v_\sigma(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\Phi_\sigma(\varphi(x, y))\, u(x, y)}{\varphi(x, y)}, & \text{если } (x, y) \in D - \Gamma; \\ 0, & \text{если } (x, y) \overline{\in} D - \Gamma. \end{cases}$$

Тогда последовательность полиномов $P_n(x, y) = R_n(v_{1/n}; (x, y))$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а последовательность полиномов $Q_n(x, y) = R_n(2v_{1/n} - R_n(v_{1/n}); (x, y))$ — условиям теоремы 2. Доказательство последних утверждений основывается на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть $f(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — две 2π-периодические функции, причем $f(x, y)$ непрерывна, а $\psi(x, y)$ непрерывно дифференцируема. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$\|\psi\cdot[f - T_n(f)]\|_{\widetilde{E}} \leqslant \|\psi\cdot f - T_n(\psi\cdot f)\|_{\widetilde{E}} + \frac{A}{n}\|f\|_{\widetilde{E}},$$

где $\widetilde{E}$ обозначает одно из пространств 2π-периодических функций двух переменных C или L_p.

Лемма 2. *Если $f(x, y)$ является непрерывной 2π-периодической функцией, то имеет место неравенство*

$$\|f - T_n(f)\|_{\widetilde{E}} < A\omega_{\widetilde{E}}\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

где $\widetilde{E}$ обозначает $\widetilde{C}$ или $\widetilde{L}_p$, A является абсолютной постоянной, а $\omega_{\widetilde{E}}(f; \varepsilon) = \sup\limits_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\leqslant\varepsilon} \|f^{\alpha, \beta} - f\|_{\widetilde{E}}$ (для периодических функций $f^{\alpha, \beta}(x, y)$ определяется следующим образом: $f^{\alpha, \beta}(x, y) = f(x + \alpha; y + \beta)$).

Лемма 3. *Если $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая 2π-периодическая функция, то имеет место неравенство*

$$\|f - T_n(f)\|_{\widetilde{E}} \leqslant \frac{A}{n}(\|f'_x\|_{\widetilde{E}} + \|f'_y\|_{\widetilde{E}}).$$

Ряд подобного рода предложений, опубликованных лишь частично (см., например, (1-3)), получен ранее С. М. Лозинским.

Лемма 4. *Пусть D, $\varphi(x, y)$ и $u(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда справедливы неравенства:*

$$\omega_L\left(\varphi\cdot\frac{\partial v_\sigma}{\partial x}; \varepsilon\right) \leqslant A\left[\omega_L(u'_x; \varepsilon) + \varepsilon\cdot\ln\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \sigma\right],$$

$$\omega_{L_p}\left(\varphi\cdot\frac{\partial v_\sigma}{\partial x}; \varepsilon\right) \leqslant A\left[\omega_{L_p}(u'_x; \varepsilon) + \varepsilon\cdot\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1-\frac{1}{p}} + \sigma^{\frac{1}{p}}\right].$$

Теорема 3. *Пусть область D и функции $\varphi(x, y)$ и $u(x, y)$ определены так же, как и в теореме 2. Тогда можно указать последовательность полиномов $S_n(x, y)$ (степени не выше n) и число A, удовлетворяющие условиям:*

а) $$\left\|\frac{\partial}{\partial x}[u - \varphi\cdot S_n]\right\|_L \leqslant A\left[\omega_L\left(u'_x, \frac{1}{n}\right) + \frac{\ln n}{n}\right];$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}[u - \varphi\cdot S_n]\right\|_L \leqslant A\left[\omega_L\left(u'_y, \frac{1}{n}\right) + \frac{\ln n}{n}\right];$$

б) $$\left\|\frac{\partial}{\partial x}[u - \varphi\cdot S_n]\right\|_{L_p} \leqslant A\left[\omega_{L_p}\left(u'_x, \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}\right];$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}[u - \varphi\cdot S_n]\right\|_{L_p} \leqslant A\left[\omega_{L_p}\left(u'_y, \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}\right].$$

Для доказательства этой теоремы достаточно положить $S_n(x, y) = R_n(v_{1/n}; (x, y))$.

Замечание. Перечисленные теоремы непосредственно распространяются на случай любого числа переменных.

Полученные результаты находят применение при исследовании сходимости метода Ритца в случае уравнения эллиптического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)-cu=f,\ u(x,\ y)=0 \text{ на } \Gamma \quad (a,b>0;\ c\geqslant 0), \quad (*)$$

когда приближенное решение разыскивается в форме:

$$u(x,\ y)=\varphi(x,\ y)\sum_{i,\ k=0}^{n}a_{i,\ k}x^iy^k, \qquad (**)$$

а также для оценки порядка аппроксимации решения.

Из одной теоремы, установленной Л. В. Канторовичем ([1], стр. 361 и [4]), следует равномерная сходимость последовательности функций $u_n(x,\ y)$ вида $\varphi(x,\ y)\cdot P_n(x,\ y)$ к решению $u(x,\ y)$, если только $\varepsilon(u_n)\ln n\to 0$, где

$$\varepsilon(u_n)=\iint\limits_D\left\{a\left[\frac{\partial(u-u_n)}{\partial x}\right]^2+b\left[\frac{\partial(u-u_n)}{\partial y}\right]^2+c\,[u-u_n]^2\right\}dx\,dy;$$

при этом $|u_n-u|=O\left(\sqrt{\varepsilon(u_n)\ln\frac{n}{\varepsilon(u_n)}}\right)$.

Воспользуемся теоремой 3. Без труда можно установить, что, полагая $u_n^*(x,\ y)=\varphi(x,\ y)\,S_n(x,\ y)$, имеем:

$$\varepsilon(u_n^*)=O\left(\left[\omega_{L_2}\left(u'_x,\ \frac{1}{n}\right)\right]^2+\left[\omega_{L_2}\left(u'_y,\ \frac{1}{n}\right)\right]^2+\frac{1}{n}\right).$$

Тем более эта оценка будет верна для $\varepsilon(u_n)$, где u_n — приближенное решение, полученное методом Ритца. Из этого следует, что если функция $u(x,\ y)$ — решение уравнения $(*)$ — непрерывно дифференцируема в области D и если

$$\left[\omega_{L_2}\left(u'_x,\ \frac{1}{n}\right)\right]^2\ln n\to 0,\quad \left[\omega_{L_2}\left(u'_y,\ \frac{1}{n}\right)\right]^2\ln n\to 0,$$

то имеет место сходимость метода Ритца, когда решение разыскивается в виде $(**)$. При этом, если $\omega_{L_2}\left(u'_x,\ \frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ и $\omega_{L_2}\left(u'_y,\ \frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, то $|u_n-u|=O\left(\frac{\ln n}{n^\lambda}\right)$, где $\lambda=\min\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\right)$.

В частности, из сказанного вытекает сходимость метода Ритца, если $u'_x(x,\ y)$ и $u'_y(x,\ y)$ удовлетворяют условию Липшица с некоторым показателем $\alpha>0$.

Поступило
7 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1949. [2] С. М. Лозинский, ДАН, 59, № 8 (1948). [3] С. М. Лозинский, ДАН, 72, № 5 (1950). [4] Л. В. Канторович, ДАН, 30, № 3, 579 (1941).