Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. Я. ЛЕВИН

ОБЩИЙ ВИД СПЕЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НАД ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 22 V 1951)

Целые функции $\omega(z)$ конечной степени (к. с.), не имеющие корней в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ и удовлетворяющие условию $h_\omega(-\pi/2) \geqslant h(\pi/2)$, образуют класс, который был обозначен мною P и рассмотрен в статьях [1-3]. Аддитивный однородный оператор, определенный на линейной оболочке функций класса P и переводящий функции класса P в функции того же класса, называется $\mathfrak{B}$-оператором. В [2] доказано, что:

Если $\omega(z)$ — функция класса P и степени σ, а $f(z)$ — функция конечной степени $\tau \leqslant \sigma$, то из неравенства

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1}$$

следует неравенство

$$|\mathfrak{B}[f(x)]| \leqslant |\mathfrak{B}[\omega(x)]|. \tag{2}$$

Так как оператор дифференцирования есть $\mathfrak{B}$-оператор [2], то из этой теоремы получается обобщение известной теоремы С. Н. Бернштейна.

В этой статье мы найдем общий вид $\mathfrak{B}$-оператора, наложив на него только некоторое условие непрерывности. Мы будем при выводе пользоваться понятиями и результатами заметок [3, 4].

Мы будем говорить, что последовательность функций к. с. сходится к функции $P_0(z)$ с весом A $(P_n(z) \xrightarrow{A} P_0(z))$, если есть такое положительное число A, что

$$\lim_{n\to\infty} \{\sup |P_n(z) - P_0(z)| e^{-A|z|}\} = 0. \tag{3}$$

$\mathfrak{B}$-оператор мы будем называть непрерывным*, если каждому $A > 0$ отвечает $B > 0$ так, что из $P_n(z) \xrightarrow{A} P_0(z)$ следует $\mathfrak{B}[P_n(z)] \xrightarrow{B} \mathfrak{B}[P_0(z)]$.

Всякий непрерывный $\mathfrak{B}$-оператор вполне определяется своими значениями на всех функциях от z вида e^{uz}.

В самом деле, из представления целой функции к. с.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} e^{uz} \psi(u)\, du, \tag{4}$$

* Мне неизвестен $\mathfrak{B}$-оператор, не удовлетворяющий этому условию.

где C — произвольный контур, охватывающий сопряженную диаграмму функции $f(z)$, а $\psi(u)$ — преобразование Лапласа от $f(z)$, следует, что непрерывный оператор имеет вид

$$K[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)} \varphi(z, -u)\psi(u)\,du, \quad \text{где } \varphi(z,u) = K[e^{-uz}]. \tag{5}$$

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывный оператор над функциями конечной степени был $\mathfrak{B}$-оператором, необходимо и достаточно, чтобы функция* $\varphi(z,u)$ *в представлении* (5) *удовлетворяла следующим требованиям:* а) $\varphi(z,u)$ *конечной степени от* z *при ограниченном* u, *т. е.*

$$\overline{\lim_{|u|\leqslant R,\,|z|\to\infty}} \frac{\ln|\omega(z,u)|}{|z|} = \sigma_R < \infty; \tag{6}$$

б) *при* $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ $\varphi(z,u) \in P_z$; в) *при* $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ $\varphi(z,u) \in P_u^*$ (*определение см.* ([4])); г) *при* $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$|\varphi(z,u)| \geqslant |\varphi(\bar z, \bar u)|. \tag{7}$$

Заметим, что из условий б), в), г) следует, что $\varphi(z,u) \in \overline{HB}$, а по теореме 6 заметки ([4]) принадлежит к P^* по совокупности переменных.

1. Необходимость. При $|u| \leqslant R$ множество функций от z, $\{e^{-uz}\}$ ограничено по норме $\|f\|_R = \sup\limits_{|z|}|f(z)|\,e^{-R|z|}$. Из определения непрерывного оператора отсюда легко следует, что при некотором $B = B_R > 0$

$$\sup_{|z|}|\varphi(z,u)|\,e^{-B|z|} \leqslant M \quad \text{при } |u| \leqslant R, \tag{8}$$

т. е. условие а).

2. Условие б) получается, если заметить, что при $\operatorname{Im} u < 0$ функция $e^{-uz} \in P_z$.

3. При $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ полином $(1 - zu/n)^n$ не имеет корней в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ (H-полином). $\mathfrak{B}$-оператор по z должен при $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ перевести этот полином в функцию класса P, т. е. функция

$$P_n(z,u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\frac{u}{n}\right)^k \mathfrak{B}[z^k] \tag{9}$$

не обращается в нуль при $\operatorname{Im} u \leqslant 0$, $\operatorname{Im} z < 0$. Иначе, $P_n(z,u)$ является при $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ H-полиномом по z.

4. Так как $\|(1 - uz/n)^n - e^{-uz}\|_R \to 0$ при $|u| \leqslant R$, то $\|P_n(z,u) - \varphi(z,u)\|_B \to 0$ и, следовательно, $\varphi(z,u) \in P_u^*$.

5. При $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ функция e^{-uz} класса P_z является мажорантой для функции $e^{-\bar u z}$. В самом деле, степени их равны и при вещественных значениях z модули их равны. Применение $\mathfrak{B}$-оператора переводит мажоранту в мажоранту, т. е. $\varphi(z,u)$ — мажоранта для $\varphi(z, \bar u)$. В статье ([2]) показано, что если $\omega(z)$ есть P-мажоранта для функции $f(z)$, то $|\omega(z)| \geqslant |f(z)|$ и $|\omega(z)| \geqslant |f(\bar z)|$ при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$. Таким образом, имеем $|\varphi(z,u)| \geqslant |\varphi(\bar z, \bar u)|$ при $\operatorname{Im} u \leqslant 0$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, т. е. условие г).

6. Достаточность. Из условия а) следует, что функция $\varphi_u^{(p)}(z,u)$ — конечной степени по z при ограниченном $|u|$.

7. Так как $\varphi(z,u) \in P^*$, то, по теореме 5 заметки ([4]), $\varphi_u^{(p)}(z,u) \in P^*$, а значит, и $\varphi_p(z) = \varphi_u^{(p)}(z, 0) \in P^*$. Но $\varphi_u^{(p)}(z,u)$ конечной степени по z и, следовательно, $\varphi_p(z) \in P$.

8. Пусть $Q(z = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ — произвольный H-полином и $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ — его корни ($\operatorname{Im}\tau_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$). Операция $(D+\tau) f(u) = e^{-\tau u} D [e^{\tau u} f(u)]$ при $\operatorname{Im}\tau \geqslant 0$ переводит функцию класса P^* в функцию того же класса. Поэтому функция

$$a_0 - a_1 \varphi'_u(z, u) + \cdots + (-1)^m \varphi^{(m)}(z, u) = \\ = (-1)^m (D + \tau_1)(D + \tau_2) \cdots (D + \tau_m) \varphi(z, u)$$

принадлежит P^*. Отсюда следует, что оператор над полиномами

$$K[Q(z)] = a_0 \varphi_0(z) - a_1 \varphi_1(z) + \cdots + (-1)^m \varphi_m(z) \quad (\varphi_p(z) = \varphi_u^{(p)}(z, u))$$

переводит всякий H-полином в функцию класса P.

9. Определим оператор $K[f(z)]$ на всех функциях конечной степени. Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_p z^p + \cdots \tag{10}$$

целая функция степени σ. Положим

$$K[f(z)] = a_0 \varphi_0(z) - a_1 \varphi_1(z) + \cdots + (-1)^p \varphi_p(z) + \cdots \tag{11}$$

Из условия а) и из известной оценки для коэффициентов степенного разложения следует, что ряд (11) сходится по норме с весом B_R ($R > e\sigma$) к функции к. с., не превышающей $B_{\sigma e}$.

10. Более того, из тех же оценок следует, что последовательность функций

$$K[P_n^f(z)] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) a_p \varphi_p(z)$$

$$\left(P_n^f(z) = \sum_{p=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) a_p z^p\right) \tag{12}$$

сходится по норме (с весом $B_{\sigma e}$) к функции $K[f(z)]$.

11. Если $f(z) \in P$, то $P_n^f(z)$ есть H-полином ([2]), следовательно, по п. 8, функция $K[P_n^f(z)] \in P$, а значит, и предельная функция $K[f(z)] \in P$. Итак, определенный нами оператор K есть $\mathfrak{B}$-оператор.

12. Применяя полученный непрерывный $\mathfrak{B}$-оператор $K[f(z)]$ к функции e^{-uz} по z, мы получим

$$K[e^{-uz}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^p}{p!} \varphi_u^{(p)}(z, 0) = \varphi(z, u). \tag{13}$$

Итак, если функция $\varphi(z, u)$ удовлетворяет условиям а) — г), то существует такой непрерывный $\mathfrak{B}$-оператор, что $\mathfrak{B}[e^{-zu}] = \varphi(z, u)$. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые частные типы $\mathfrak{B}$-операторов.

Теорема 2. *Непрерывный $\mathfrak{B}$-оператор, перестановочный с оператором дифференцирования, имеет вид*

$$\mathfrak{B}[f(z)] = \overline{F}(D) f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k f^{(k)}(z), \tag{14}$$

где $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *— функция класса* P^*.

Доказательство. Пусть $\varphi(z, u) = \mathfrak{V}[e^{-uz}]$. Если $\mathfrak{V}$-оператор перестановочен с оператором дифференцирования,

$$\varphi_z'(z, u) = \mathfrak{V}[-ue^{-uz}] = -u\varphi(z, u) \quad \text{или} \quad \varphi(z, u) = e^{-uz}\Phi(u). \tag{15}$$

По теореме 1, $\Phi(u) \in P^*$. Наоборот, функция $\varphi(z, u)$ вида (15), где $\Phi(u)$ — произвольная функция класса P^*, порождает $\mathfrak{V}$-оператор. Если обозначить $\overline{\Phi}(-u)$ через $F(u)$, то из (15) и (5) получим (14).

Обозначим $\overline{\Phi}(-u) = F(u)$. Очевидно, $F(u) \in P^*$. Разлагая $F(u)$ в ряд и интегрируя, получим (15).

Теорема 3. *$\mathfrak{V}$-оператор, перестановочный с оператором $z\,d/dz$, имеет вид*:

$$\text{если } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} z^k, \text{ то } \mathfrak{V}[f(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \gamma_k}{k!} z^k, \tag{16}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ — последовательность множителей 1-го рода, причем все γ_k одного знака.*

Аналогично можно построить и другие $\mathfrak{V}$-операторы. В частности, легко видеть, что $\mathfrak{V}$-оператор, удовлетворяющий условию $a\mathfrak{V}[zf(z)] = b(\mathfrak{V}[f(z)]')$ $(a > 0,\ b > 0)$ дается функцией $\mathfrak{V}[e^{-uz}] = \omega(az + bu)$, где $\omega(z)$ — произвольная функция класса P.

Харьковский горный институт

Поступило
17 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Я. Левин, ДАН, 65, № 5, 605 (1949). [2] Б. Я. Левин, Изв. АН СССР, 14, № 1, 45 (1950). [3] Б. Я. Левин, ДАН, 78, № 5 (1951). [4] Б. Я. Левин, ДАН, 78, № 6 (1951). [4] Г. Полиа и И. Шур, Journ. f. reine und angew. Math., 144, 89 (1914).

* Понятие, введенное Полиа и Шуром ([5]). Последовательность чисел $\{\gamma_k\}$ называется последовательностью множителей 1-го рода, если всякий полином с вещественными корнями $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ переходит при операции $\Gamma(P(z)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \gamma_k z^k$ в полином с веществнными корнями.