Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

Е. М. ЛАНДИС

О ДЛИНЕ ЛИНИЙ УРОВНЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 V 1951)

Использование линий уровня в качестве аппарата для изучения функции двух переменных ([1]) приводит к потребности оценивать длину множества уровня. Очевидно, при этом имеют смысл лишь интегральные оценки, так как в случае неаналитической функции про один индивидуальный уровень ничего сказать нельзя. В настоящей заметке производится интегральная оценка длин множеств уровня дифференцируемой функции двух переменных в зависимости от порядка ее дифференцируемости.

Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, заданная на единичном (замкнутом) квадрате J. Множеством уровня E_t функции f называется множество точек $(x, y) \in J$, в которых $f(x, y) = t$. Длиной или линейной мерой множества $A \in J$ называется линейная мера Хаусдорфа ([2]) множества A и обозначается $\mathrm{mes}_1 A$ (плоскую меру Лебега множества A мы будем обозначать через $\mathrm{mes}_2 A$, а меру Лебега множества B на прямой — через $\mathrm{mes}\, B$). Положим $\nu_f(t) = \mathrm{mes}_1 E_t$.

А. С. Кронродом показано ([1]), что если функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nu_f(t)\, dt$ (этот интеграл равен плоской вариации функции f) сходится. Ниже мы докажем, что для $p > 1$ раз непрерывно дифференцируемой функции f функция $\nu_f(t)$ принадлежит L^p.

Лемма 1. *Пусть множество $l \subset J$ есть сумма конечного числа непересекающихся непрерывно дифференцируемых простых дуг либо гомеоморфных образов окружности. Пусть, далее, k — натуральное число и длина l равна $L > 8k$.*

Отнесем к множеству E такие точки $(x, y) \in l$, для каждой из которых найдется отрезок длины $16k/L$, содержащий точку (x, y), образующий с касательной к l в точке (x, y) угол, не меньший $\pi/8$, и пересекающий множество l не менее, чем в k точках.

Тогда множество E измеримо по линейной мере и $\mathrm{mes}_1 E \geqslant L/2$.

Доказательство. Отнесем к множеству E_n такие точки (x, y), для каждой из которых найдется отрезок $I^{(x, y)}$ такой, что: 1) $(x, y) \in I^{(x, y)}$; 2) $\mathrm{mes}_1 I^{(x, y)} = 16k/L$; 3) угол между $I^{(x, y)}$ и касательной к l в точке (x, y) не меньше $\pi/8$; 4) пересечение $I^{(x, y)} \cdot l$ содержит по крайней мере k точек таких, что попарные расстояния между ними не меньше $1/n$.

Множество E_n замкнуто и $E = \sum\limits_n E_n$. Таким образом, множество E B-измеримо.

Введем на J систему координат, направив ось x вдоль одной из его сторон, ось y — вдоль другой. Отнесем к множеству H_1 те точки из $H = l \setminus E$, в которых касательная к l образует с осью x угол, не больший $\pi/4$, и к множеству H_2 — остальные точки из H.

Оценим сверху $\mathrm{mes}_1 H_1$, (множество H_1, очевидно, замкнуто в H и потому измеримо). Для этого положим функцию $\pi(x)$ равной числу точек из H, расположенных на прямой, параллельной оси y, проходящей через точку x оси x.

Тогда $\mathrm{mes}_1 H_1 \leqslant 2 \int\limits_0^1 \pi(x)\, dx$.

Но $\pi(x) < \left(\left[\frac{L}{16k}\right] + 1\right) k$ (где через $[a]$ обозначена целая часть числа a). Действительно, разобьем отрезок, отсекаемый квадратом J от прямой, параллельной оси y, проходящей через точку x, на $\left[\frac{L}{16k}\right] + 1$ равных частей. На каждом из полученных отрезочков, по условию, расположено меньше k точек из l (может быть, ни одной), а значит, и подавно меньше k точек из H_1.

Отсюда $\mathrm{mes}_1 H_1 < 2\left(\left[\frac{L}{16k}\right] + 1\right) k < L/4$.

Аналогично $\mathrm{mes}_1 H_2 < L/4$ и, следовательно, $\mathrm{mes}_1 H < L/2$ или $\mathrm{mes}_1 E \geqslant L/2$.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — функция одного переменного, определенная на отрезке $[a, b]$. Пусть Δ — длина отрезка $[a, b]$ и функция $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ k раз. Пусть, далее, $|f^{(k)}(x)| \leqslant K$ при $x \in [a, b]$ и пусть, наконец, $f(x)$ принимает на $[a, b]$ некоторое фиксированное значение y_0 по крайней мере в k точках.*

Тогда в каждой точке $x \in [a, b]$ $|f'(x)| \leqslant K\Delta^{k-1}$.

Доказательство легко получается путем применения теорем Ролля и Лагранжа к функции $f(x)$ и ее производным.

Лемма 3. *Пусть $L \subset J$ — дважды непрерывно дифференцируемая кривая и $E \subset L$ — B-множество. Проведем через каждую точку E отрезок, нормальный к L, длины δ с центром в этой точке. Обозначим через H теоретико-множественную сумму этих отрезков.*

Тогда $\mathrm{mes}_2 H \geqslant \frac{1}{2} \delta\, \mathrm{mes}_1 E$.

Доказательство следует из теоремы Фубини.

Теорема 1. *Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, заданная на J и непрерывно дифференцируемая на J до порядка p $(p \geqslant 2)$.*

Тогда для функции $f(x, y)$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\nu_f(t)]^p < +\infty$.

Доказательство. Пусть $m = \min\limits_{(x, y) \in J} f(x, y)$ и $M = \max\limits_{(x, y) \in J} f(x, y)$.

Обозначим через E множество точек $t \in [m, M]$ таких, что множество уровня E_t не содержит точек, в которых $\mathrm{grad} f = 0$. Тогда $\mathrm{mes}\, E = M - m$.

Пренебрегая сколь угодно малой длиной, мы можем считать, что каждое множество уровня E_t (за исключением, может быть, счетного числа уровней, которым принадлежит часть границы J положительной длины) состоит из конечного числа дважды непрерывно дифференцируемых простых дуг или гомеоморфных образов окружности.

Обозначим через E_1 множество точек $t \in E$, в которых $\nu_f(t) > 8p$. Обозначим, далее, через E_t^1 множество точек $(x, y) \in E_t$, для каждой из которых найдется отрезок $l^{(x, y)}$, ее содержащий, длины $16p/\nu_f(t)$, образующий с касательной к E_t в точке (x, y) угол, не меньший $\pi/8$, и пересекающий множество E_t не менее, чем в p точках. Согласно лемме 1, для каждой точки $t \in E_1$ $\operatorname{mes}_1 E_t^1 \geqslant \nu_f(t)/2$.

По лемме 2, в каждой точке $(x, y) \in E_t^1$ первая производная функции f в направлении $l^{(x, y)}$ по модулю не превосходит $\left[\frac{16}{\nu_f(t)}\right]^{p-1}(p+1)K$, где K — константа, ограничивающая все частные производные порядка p. Отсюда $|\operatorname{grad} f(x, y)| \leqslant 2\left[\frac{16}{\nu_f(t)}\right]^{p-1}(p+1)K$ или $|\operatorname{grad} f(x, y)| \leqslant$ $\leqslant C\left[\frac{1}{\nu_f(t)}\right]^{p-1}$, где C — константа, зависящая от функции. Следовательно, в силу непрерывной дифференцируемости f, существует такое $\delta_t > 0$, что на каждом отрезке длины $\delta < \delta_t$ с центром в точке $(x, y) \in E_t^1$, нормальном к E_t, функция f отличается от значения в точке (x, y) меньше, чем на $2C\left[\frac{1}{\nu_f(t)}\right]^{p-1}\delta$.

Применяя лемму 3, мы получаем, что для каждой точки $t \in E_1$ существует сколь угодно малая окрестность Δ такая, что плоская мера ее прообраза $f^{-1}[\Delta]$ больше $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2C}\,[\nu_f(t)]^{p-1}\,\frac{\nu_f(t)}{2} = \frac{1}{8C}\,[\nu_f(t)]^p$.

Если отрезки Δ не пересекаются, то их прообразы также не пересекаются. Следовательно, сумма плоских мер прообразов непересекающихся Δ не превосходит 1 (площадь квадрата J). С другой стороны, отрезки Δ образуют покрытие множества E_1 в смысле Витали. Отсюда

$$\frac{1}{8C}\int_{E_1}[\nu_f(t)]^p\,dt \leqslant 1$$

и, так как

$$\int_{[M, m]\setminus E_1}[\nu_f(t)]^p\,dt \leqslant 8p(M-m),$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\nu_f(t)]^p\,dt = \int_m^M [\nu_f(t)]^p\,dt < +\infty.$$

Поступило
18 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Кронрод, Усп. матем. наук, 5, в. 1 (1950). [2] С. Сакс, Теория интеграла, М., 1949. [3] А. С. Кронрод и Е. М. Ландис, ДАН, 58, № 7 (1947).