

М. Г. ХАПЛАНОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 22 VI 1951)

В настоящей заметке рассматриваются линейные преобразования

$$y = Mx \quad (1)$$

пространства E в E' , когда одно из них или оба — аналитические ⁽¹⁾; M — бесконечная матрица, составленная из коэффициентов $\{a_{jn}\}$ преобразования (1).

В следующих теоремах указываются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять матрица M , чтобы любая точка $x \in E$ переходила в точку $y \in E'$ (но при этом не утверждается, что для всякой точки $y \in E'$ можно найти точку $x \in E$, удовлетворяющую равенству (1)). Теоремы приводим для пространства функций, аналитических в единичном круге; очевидно, к этому случаю легко свести пространства функций, аналитических в круге произвольного радиуса.

Теорема 1. *Линейное преобразование преобразует пространство A_1 в себя тогда и только тогда, когда для всякого $q > 1$ можно указать такую последовательность положительных чисел*

$$c_1, c_2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} < 1, \quad (2)$$

что

$$|a_{jn}| \leq c_j q^n \quad (j, n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Достаточность указанного условия легко установить. Для доказательства его необходимости заметим, что в пространстве \bar{A}_1 точки

$$x^{(n)}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ нулей}}, r, 0, \dots), \quad 0 < r < 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

образуют ограниченное множество, так как соответствующие им аналитические функции $r^n z^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, имеют общую мажоранту $\sum_{n=1}^{\infty} r^n z^{n-1}$, принадлежащую \bar{A}_1 ⁽¹⁾. Известно ⁽²⁾, что линейное преобразование преобразует ограниченное множество в ограниченное. Поэтому точки $y^{(n)} = Mx^{(n)} = (a_{1n}r^n, a_{2n}r^n, \dots, a_{jn}r^n, \dots)$ ($n = 1, 2, \dots$) образуют ограниченное множество и, следовательно ⁽¹⁾, мажорируются одной точкой $c(c_1, c_2, \dots) \in \bar{A}_1$, относительно которой всегда можно предполагать, что $c_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots$), $\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{c_j} < 1$. Итак, $|a_{jn}|r^n \leq c_j$,

т. е. условие (3) выполняется для произвольного $q = \frac{1}{r} > 1$.

Теорема 2. *Линейное преобразование преобразует пространство A_1 в себя тогда и только тогда, когда:*

- а) столбцы матрицы мажорируются одной точкой $c \in A_1$;
 б) существует $q, 0 < q < 1$, и $\nu > 0$ такие, что

$$|a_{jn}| \leq q^n, \quad n > \nu j \quad (n, j = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Из указанных двух теорем можно вывести еще две, также дающие условия преобразования в себя пространств A_1 и \bar{A}_1 , на основании теоремы (2): если матрица M преобразует пространство E в E' , то транспонированная матрица M' преобразует пространство $E'^{(*)}$ в E^* .

Теорема 3. *Линейное преобразование преобразует пространство \bar{A}_1 в A_1 тогда и только тогда, когда для всякого $q > 1$ можно указать такую последовательность положительных чисел*

$$c_1, c_2, \dots, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{c_j} \leq 1, \quad (2')$$

что

$$|a_{jn}| \leq c_j q^n \quad (j, n = 1, 2, \dots). \quad (3')$$

Теорема 4. *Чтобы линейное преобразование преобразовывало пространство A_1 в \bar{A}_1 , необходимо и достаточно, чтобы:*

- а) столбцы матрицы мажорировались одной точкой $c \in \bar{A}_1$;
 б) существовали числа $q, 0 < q < 1$, и $\nu > 0$ такие, что

$$|a_{jn}| \leq q^n, \quad n > \nu j \quad (j, n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Чтобы доказать достаточность этих условий, заметим, что строки матрицы принадлежат A_1^* , т. е. \bar{A}_1 ; поэтому $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{jn}} < 1$ ($j = 1, 2, \dots$). Согласно условию а),

$$|a_{jn}| \leq c_j, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{c_j} < 1 \quad (j, n = 1, 2, \dots).$$

Зная, согласно условию, числа q и ν , выберем $r > 1$ произвольно, но так, чтобы выполнялись неравенства

$$qr < 1, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{c_j} r^\nu < 1.$$

Пусть x — произвольная точка из A_1 . Чтобы доказать, что точка $y = Mx$ принадлежит \bar{A}_1 , найдем n_0 из условия $|x_n| < r^n$ при $n > n_0$ и оценим координату y_j :

$$|y_j| \leq |a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn_0}x_{n_0}| + |a_{j, n_0+1}x_{n_0+1} + \dots + a_{j, \nu j-1}x_{\nu j-1}| + |a_{j, \nu j}x_{\nu j} + \dots|;$$

$$|y_j| \leq c_j(|x_1| + \dots + |x_{n_0}|) + c_j \frac{r^{\nu j}}{1-r} + \frac{(qr)^{\nu j}}{1-qr}.$$

Отсюда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|y_j|} < 1$, ч. и т. д.

Необходимость условия а) следует из ограниченности в A_1 множества ортов. Необходимость условия б) докажем от противного. Если оно не выполняется, то для всякого $q < 1$ и любого $\nu > 0$ мож-

но найти сколь угодно большие значения j_k и соответствующие им значения n_k так, что

$$|a_{j_k, n_k}| > q^{n_k}, \quad n_k > v j_k. \quad (5)$$

Предположим, что числа $\lambda_k, j_k, n_k, q_k, N_k$ для $k = 1, 2, \dots, m-1$ уже выбраны, а для $k = m$ выбор их произведем следующим образом:

1) $\lambda_m > \lambda_{m-1}, \quad 1 + \frac{3}{\lambda_m} < q_{m-1};$

2) полагая в (5) $q = 1 - \frac{1}{\lambda_m}, \quad v = \lambda_m$, выберем j_m и n_m так, чтобы выполнялись неравенства

$$|a_{j_m, n_m}| > \left(1 - \frac{1}{\lambda_m}\right)^{n_m}, \quad n_m > \lambda_m j_m,$$

причем возьмем для j_m столь большое значение, что соответствующее ему значение n_m удовлетворяет неравенствам:

3) $n_m > N_{m-1}, \quad n_m > n_{m-1},$

$$\left(1 + \frac{3}{\lambda_1}\right)^{n_1} + \dots + \left(1 + \frac{3}{\lambda_{m-1}}\right)^{n_{m-1}} < \frac{1}{\lambda_m} \left(1 + \frac{1}{\lambda_m}\right)^{n_m};$$

4) выбрав j_m , вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{j_m, n}|} = r_m' < 1$, возьмем произвольно но $r_m', r_m'' < r_m' < 1$, и подберем $q_m > 1$ так, чтобы $r_m = r_m' q_m < 1$;

5) наконец, N_m определим из условий: при $n > N_m$

$$|a_{j_m, n}| < (r_m')^n, \quad r_m^n + r_m^{n+1} + \dots < 1.$$

Построив указанным способом бесконечно растущую последовательность чисел $\lambda_k, n_k, k = 1, 2, \dots$, рассмотрим точку x с координатами:

$$x_{n_k} = \left(1 + \frac{3}{\lambda_k}\right)^{n_k}; \quad x_n = 0, \quad \text{если } n \neq n_1, n_2, \dots$$

Очевидно, $x \in A_1$. Линейное преобразование переводит ее в точку y с координатами

$$y_j = a_{j, n_1} x_{n_1} + a_{j, n_2} x_{n_2} + \dots \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Оценим y_{j_k} :

$$|y_{j_k}| \geq |a_{j_k, n_k}| x_{n_k} - (|a_{j_k, n_1}| x_{n_1} + \dots + |a_{j_k, n_{k-1}}| x_{n_{k-1}}) - \\ - (|a_{j_k, n_{k+1}}| x_{n_{k+1}} + \dots).$$

Согласно условию а), считая j_k достаточно большим, имеем $|a_{j_k, n}| \leq 1$. Поэтому, а также на основании условий 1) — 5), имеем:

$$|y_{j_k}| \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{n_k} \left(1 + \frac{3}{\lambda_k}\right)^{n_k} - \left[\left(1 + \frac{3}{\lambda_1}\right)^{n_1} + \dots + \left(1 + \frac{3}{\lambda_{k-1}}\right)^{n_{k-1}}\right] - \\ - [(r_k' q_k)^{n_{k+1}} + \dots],$$

или

$$|y_{j_k}| \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda_k}\right) \left(1 + \frac{1}{\lambda_k}\right)^{n_k} - 1.$$

Поэтому $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|y_j|} \geq \epsilon$, т. е. точка $y \in \overline{A_1}$.

Теорема 5. Чтобы линейное преобразование преобразовывало пространство S всевозможных точек в аналитическое пространство A_1 (или $\overline{A_1}$), необходимо и достаточно, чтобы все столбцы матрицы преобразования, начиная с некоторого, состояли из нулей, а остальные принадлежали A_1 (или, соответственно, $\overline{A_1}$).

Теорема 6. Чтобы линейное преобразование преобразовывало пространство $l^{(p)}$ ($1 \leq p \leq \infty$) в аналитическое пространство A_1 (или $\overline{A_1}$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\|a^{(j)}\|} \leq 1$$

(или, соответственно,

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\|a^{(j)}\|} < 1).$$

где $\|a^{(j)}\|$ — норма j -й строчки матрицы преобразования в метрике пространства $l^{(\frac{p}{p-1})}$.

Эта теорема справедлива не только для $l^{(p)}$, но также для любого метрического пространства E типа (B) , в котором нормы точек обладают следующими свойствами:

1) для всякой точки $x \in E$ во взаимном пространстве E^* можно указать:

а) либо точку u единичной нормы, для которой

$$\|x\| = xu;$$

б) либо последовательность точек $\{u^{(n)}\}$ единичной нормы, для которой

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} xu^{(n)};$$

2) координаты точки по модулю не превосходят ее нормы;

3) норма точки есть монотонная неубывающая функция модулей ее координат;

4) либо в E либо в E^* каждая точка есть предел по норме n -го «отрезка» ее;

5) справедливо неравенство

$$|xu| \leq \|x\| \cdot \|u\|.$$

Из теорем 5, 6, переходя к транспонированной матрице, получим необходимые и достаточные условия для линейного преобразования аналитических пространств A_1 и $\overline{A_1}$ в пространства Φ , $l^{(p)}$.

Приведенные теоремы могут быть использованы для решения вопроса, образует ли заданная последовательность функций базис в пространстве аналитических в круге $|z| < R$ функций.

Ростовский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило
14 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Г. Хапланов, ДАН, 79, № 6 (1951). ² G. Köthe u. O. Töplitz, Journ. f. reine und angew. Math., 171, 193 (1934).