Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

К ЗАДАЧЕ О ТОЧКАХ БИФУРКАЦИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 V 1951)

1. Пусть A — непрерывный оператор, действующий в вещественном банаховом пространстве E и удовлетворяющий условию $A\theta = \theta$, где θ — нуль пространства E. Тогда уравнение

$$\varphi = \lambda A\varphi \tag{1}$$

имеет тривиальное решение θ при всех значениях параметра λ.

Вектор $\varphi \in E$, $\varphi \neq \theta$ называется собственным вектором оператора A, если он является решением уравнения (1) при некотором значении параметра λ, которое называется собственным числом.

Число λ называется точкой бифуркации оператора A, если при любом $\varepsilon > 0$ в интервале $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ есть собственные числа оператора A, которым отвечают собственные функции сколь угодно малой нормы. Пусть множество собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам из любого интервала $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$, таково, что непусто пересечение его с границей каждого открытого множества, содержащего θ и лежащего в шаре достаточно малого радиуса. Тогда это множество будем называть непрерывной ветвью собственных векторов, отвечающей точке бифуркации λ.

Пусть оператор A имеет в точке θ дифференциал Фреше B, который является вполне непрерывным оператором (полная непрерывность оператора A не предполагается).

Тогда *точками бифуркации оператора A могут быть только собственные числа линейного оператора B.*

Это утверждение для интегро-степенных рядов (а по существу и для общего случая) содержится в ляпуновской теории ветвлений [1].

В механике при отыскании точек бифуркации задачу обычно линеаризуют: считают точками бифуркации оператора A все собственные числа оператора B. Попытку обосновать этот принцип провел Ф. С. Ясинский [2], который допустил, однако, в своих рассуждениях ошибку (на работу Ф. С. Ясинского и на имеющуюся там ошибку наше внимание обратили А. Ю. Ишлинский и М. Г. Крейн). Оказывается, что *линеаризация допустима не всегда.*

Для одного частного случая (задача об изгибе стержня постоянной жесткости) законность линеаризации была показана Филоненко-Бородичем. Для уравнений Гаммерштейна с положительно определенными симметрическими ядрами и аналитическими нелинейностями при дополнительных ограничениях законность линеаризации была обоснована Н. Н. Назаровым [3].

В заметке [4] мы показали для случая, когда оператор A вполне непрерывен, что каждое собственное число нечетной кратности оператора B является точкой бифуркации оператора A, которой отвечает непрерывная ветвь собственных векторов.

2. Следуя Н. Н. Назарову ([3]), будем называть совокупность собственных чисел оператора A его спектром. Спектр называется сплошным, если он содержит некоторый интервал.

Пусть A — вполне непрерывный оператор, имеющий в точке θ дифференциал Фреше B и удовлетворяющий условию $A\theta = \theta$. Пусть λ — собственное число нечетной кратности линейного оператора B. Пусть на границе некоторого открытого множества, содержащего θ, нет собственных векторов оператора A, отвечающих точке бифуркации λ (как собственному числу).

Тогда спектр оператора A сплошной.

Расположим собственные числа нечетной кратности оператора в порядке возрастания

$$\ldots \lambda_{k-1} < \lambda_k < \lambda_{k+1} \ldots$$

Пусть на границе некоторого открытого множества, содержащего θ, нет собственных векторов оператора A, отвечающих значениям параметра λ из интервала $(\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1})$.

Тогда по крайней мере один из интервалов $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$ или $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ полностью принадлежит спектру оператора A.

Оба приведенных утверждения устанавливаются топологическими методами, основанными на изучении топологической степени Лерея — Шаудера некоторых вполне непрерывных векторных полей.

3. Пусть оператор D удовлетворяет в шаре $T_r \subset E$ радиуса r условию Липшица

$$\| D_\varphi - D_\psi \| \leqslant q \| \varphi - \psi \| \quad (\varphi, \psi \subset T_r). \tag{2}$$

Тогда, как известно, при достаточно малых по абсолютной величине значениях α уравнение

$$\varphi = \alpha D \varphi + f$$

имеет решение для f из некоторого шара. Решение этого уравнения будем обозначать через $R_\alpha f$. Оператор R_α естественно назвать резольвентой оператора D. По определению

$$R_\alpha f \equiv \alpha D (R_\alpha f) + f.$$

Оператор R_α обладает рядом свойств обычной резольвенты линейного оператора. Приведем некоторые из них для случая $D\theta = \theta$, который нас будет интересовать ниже. Очевидно, в этом случае $R_\alpha \theta = \theta$. Резольвента R_α определена при $|\alpha| < 1/q$ в шаре T радиуса $r(1 - |\alpha| q)$. Для элементов $f_1, f_2 \in T$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{1 + |\alpha| q} \| f_1 - f_2 \| \leqslant \| R_\alpha f_1 - R_\alpha f_2 \| \leqslant \frac{1}{1 - |\alpha| q} \| f_1 - f_2 \| .$$

Для элементов f из шара радиуса $r \min (1 - |\alpha| q, 1 - |\beta| q)$ справедливо неравенство

$$\| R_\alpha f - R_\beta f \| \leqslant \frac{q \| f \| \, |\alpha - \beta|}{(1 - |\alpha| q)(1 - |\beta| q)} .$$

Пусть нелинейный оператор L $(L\theta = \theta)$ представим в виде

$$L = A + D, \tag{3}$$

где A — вполне непрерывный оператор с дифференциалом Фреше B в точке θ, а оператор D удовлетворяет условию (2).

Рассмотрим векторные поля

$$\Phi(t, \psi) = R_{\lambda+(1-2t)\varepsilon}\{[\lambda-(1-2t)\varepsilon]A\psi\}-\psi$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Эти поля будут при достаточно малом q определены в некотором шаре T. Если λ — собственное число нечетной кратности оператора B, то топологические степени этих полей на границах Γ областей, содержащихся в шаре малого радиуса и содержащих θ, будут различны при $t=0$ и при $t=1$ (при достаточно малом q). Так как поля Φ вполне непрерывны и вектор-функция $\Phi(t, \psi)$ непрерывна по t равномерно относительно $\psi \in T$, то найдется такой элемент $\psi_0 \in \Gamma$, что при некотором t_0, $0 < t_0 < 1$,

$$\Phi(t_0, \psi_0) = \theta.$$

Последнее равенство эквивалентно тому, что

$$\psi_0 = [\lambda + (1-2t_0)\varepsilon] L\psi_0.$$

Таким образом, если q достаточно мало, то в окрестности каждого собственного числа нечетной кратности оператора B есть точки бифуркации оператора L.

Наиболее интересен для приложений случай, когда оператор D удовлетворяет условию

$$\| D\varphi - D\psi \| \leqslant q(\rho) \| \varphi - \psi \| \quad (\| \varphi \|, \| \psi \| \leqslant \rho), \tag{4}$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} q(\rho) = 0. \tag{5}$$

В этом случае сформулированное выше утверждение допускает уточнение.

Теорема. *Пусть оператор L представим в виде* (3), *где оператор A вполне непрерывен и имеет в точке θ дифференциал Фреше B, а оператор D удовлетворяет условиям* (4) *и* (5).

Тогда каждое собственное число нечетной кратности оператора B будет точкой бифуркации оператора L. Этой точке бифуркации соответствует при этом в окрестности θ непрерывная ветвь собственных векторов оператора L.

В условиях теоремы B является дифференциалом Фреше в точке θ оператора L. Теорема является обоснованием линеаризации в задаче о точках бифуркации не вполне непрерывных операторов для случая, когда эти не вполне непрерывные операторы имеют вполне непрерывный дифференциал Фреше с собственными числами нечетной кратности.

Утверждения пункта 2 настоящей заметки переносятся на не вполне непрерывные операторы, удовлетворяющие условиям теоремы, если в этих утверждениях рассматривать границы областей, лежащих в шаре достаточно малого радиуса.

Обозначим через E_λ инвариантное подпространство оператора B, соответствующее собственному числу λ. Через $\mathcal{E}_\lambda$ обозначим непрерывную ветвь собственных векторов оператора L, соответствующую точке бифуркации λ. *В точке θ подпространство E_λ касательно к ветви $\mathcal{E}_\lambda$ собственных векторов в том смысле, что*

$$\lim_{\varphi \in \mathcal{E}_\lambda, \|\varphi\| \to 0} \frac{\rho(\varphi, E_\lambda)}{\|\varphi\|} = 0.$$

4. Естественным примером не вполне непрерывного оператора, удовлетворяющего условиям теоремы, является интегро-степенной ряд А. М. Ляпунова

$$L\varphi(s) = \int_0^1 K_0(s, t)\,\varphi(t)\,dt + \tag{6}$$

$$+ \sum_{\alpha+\beta_1+\ldots+\beta_{k_i}\geqslant 2} \varphi^{\alpha}(s) \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_i(s, t_1, \ldots, t_{k_i})\,\varphi^{\beta_1}(t_1)\ldots\varphi^{\beta_{k_i}}(t_{k_i})\,dt_1\ldots dt_{k_i}.$$

При естественных ограничениях, наложенных на ядра (см., например, [5]), оператор

$$A\varphi(s) = \int_0^1 K_0(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

будет вполне непрерывен в единичном шаре непрерывных на сегменте $[0, 1]$ функций, а оператор

$$D\varphi(s) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_i(s, t_1, \ldots, t_{k_i})\,\varphi^{\beta_1}(t_1)\ldots\varphi^{\beta_{k_i}}(t_{k_i})\,dt_1\ldots dt_{k_i}$$

будет удовлетворять в этом шаре условиям (4) и (5).

Следовательно, *каждое собственное число нечетной кратности ядра* $K_0(s, t)$ *является точкой бифуркации оператора* (6) *А. М. Ляпунова.*

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
17 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Зап. Академии наук, СПб, 1906. [2] Ф. С. Ясинский, Собр. соч., **2**, 1903. [3] Н. Н. Назаров, Тр. САГУ, **33**, 1 (1941). [4] М. А. Красносельский, ДАН, **74**, № 1 (1950). [5] Н. С. Смирнов, Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, Л. — М., 1936.