Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

М. П. ГАНИН

ЭКВИВАЛЕНТНО-РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 21 V 1951)

Рассмотрим систему линейных сингулярных интегральных уравнений

$$K\varphi(t) \equiv A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = g(t), \tag{1}$$

где L — совокупность простых гладких замкнутых контуров; $A(t)$, $B(t)$, $K(t,\tau)$ — заданные на L матрицы; $g(t)$ — заданный на L вектор, $\varphi(t)$ — искомый вектор.

Предполагается, что матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор $g(t)$ удовлетворяют на L условию Гельдера, а $K(t,\tau) = K_0(t,\tau)/|t-\tau|^\lambda$, где $K_0(t,\tau)$ — матрица, удовлетворяющая условию Гельдера по обеим переменным, причем $0 \leqslant \lambda < 1$. Предполагается также, что $\det S(t) \neq 0$, $\det T(t) \neq 0$ всюду на L, где $S(t) = A(t) + B(t)$, $T(t) = A(t) - B(t)$.

Назовем оператор R эквивалентно-регуляризирующим оператором для системы (1), если он переводит эту систему сингулярных интегральных уравнений в эквивалентную ей систему интегральных уравнений Фредгольма.

В случае одного уравнения построение эквивалентно-регуляризирующего оператора дано в работах ([1, 2]). Для систем сингулярных интегральных уравнений вопрос эквивалентной регуляризации рассматривался в работах ([3, 4]) *.

В данной заметке дается доказательство существования эквивалентно-регуляризирущего оператора и его построение для системы (1) сингулярных интегральных уравнений.

Покажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если система (1) сингулярных интегральных уравнений разрешима, то она допускает эквивалентно-регуляризирующий оператор.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$NF(t) \equiv EF(t) + \frac{E\beta(t)}{\pi i}\int_L \frac{F(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0, \tag{2}$$

* В монографии [3] Н. П. Векуа под эквивалентной регуляризацией понимается регуляризация в обобщенном смысле и указывается на один частный случай эквивалентной регуляризации в обыкновенном смысле (случай, когда все частные индексы регуляризирующего оператора не положительны). В. Д. Купрадзе ([4]) указывает на один случай существования эквивалентно-регуляризирующего оператора, когда выполняется условие $U = U'$, где $U = (A+B)^{-1}(A-B)$.

где E — единичная матрица, $\beta(t) = \frac{1 - \alpha t^{-p}}{1 + \alpha t^{-p}}$, причем p — целое положительное число, а $\alpha \neq 0$ — такая постоянная, что выражение $1 + \alpha t^{-p}$ отлично от нуля всюду на L.

Так как все частные индексы этого уравнения отрицательны, то оно не имеет (нетривиальных) решений.

Регуляризирующий оператор системы (1) имеет вид

$$P\omega(t) \equiv \frac{1}{2}[S^{-1}(t) + T^{-1}(t)]\,\omega(t) + \frac{S'(t) - T^{-1}(t)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \quad (3)$$

Обозначим частные индексы уравнения $p\omega(t) = 0$ через $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$. С помощью оператора N образуем новую характеристическую систему сингулярных интегральных уравнений

$$Q\,\omega(t) \equiv (Np)^0\,\omega(t) \equiv \frac{1}{2}[(S^{-1}(t) + T^{-1}(t)) + \beta(t)(S^{-1}(t) - T^{-1}(t))]\,\omega(t) + \\ + [(S^{-1}(t) - T^{-1}(t)) + \beta(t)(S^{-1}(t) + T^{-1}(t))]\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0. \quad (4)$$

Легко видеть, что частные индексы этого уравнения будут

$$\nu_1 - p,\ \nu_2 - p, \ldots, \nu_n - p.$$

Подобрав целое число p так, чтобы все эти выражения были не положительны* получим, что уравнение (4) не имеет нетривиальных решений, а поэтому система (1) будет эквивалентна следующей системе сингулярных интегральных уравнений

$$QK\varphi(t) \equiv E\varphi(t) + \frac{E\beta(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int\limits_L K_1(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = Qg(t), \quad (5)$$

где $K_1(t,\tau)$ — матрица, удовлетворяющая тем же условиям, что и матрица $K(t,\tau)$.

Образуем сопряженную с (5) систему сингулярных интегральных уравнений

$$\overline{(QK)'}\,\psi(t) \equiv E\psi(t) + \frac{E}{\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\beta(\tau)}\,\psi(\tau)}{\overline{\tau} - \overline{t}}\,d\overline{\tau} + \int\limits_L \overline{K_1'(\tau, t)}\,\psi(\tau)\,d\overline{\tau} = 0 \quad (6)$$

и воспользуемся теоремой о том, что в случае разрешимости системы (5) последняя эквивалентна следующей системе сингулярных уравнений:

$$\overline{(QK)'}\,QK\varphi(t) \equiv \\ \equiv E\,[1 + \overline{\beta(t)}\,\beta(t)]\,\varphi(t) + \frac{E\,[\overline{\beta(t)} + \beta(t)]}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}\,d\tau + \int\limits_L K_2(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = \\ = \overline{(QK)'}\,Qg(t), \quad (7)$$

где $K_2(t,\tau)$ — матрица, удовлетворяющая тем же условиям, что и матрица $K_1(t,\tau)$.

---

* Это число можно подобрать, не вычисляя частных индексов уравнения $P\omega(t) = 0$, если учесть замечание в § 5 книги ([3]).

Легко видеть, что эквивалентно-регуляризирующим оператором этой системы будет оператор

$$M\Phi(t) \equiv E\left[1 + \overline{\beta(t)}\,\beta(t)\right]\Phi(t) - \frac{E\left[\overline{\beta(t)} + \beta(t)\right]}{\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

потому, что

$$E\left(1 + \overline{\beta(t)}\,\beta(t)\right]\left[\overline{\beta(t)} + \beta(t)\right] - E\left[\overline{(\beta(t)} + \beta(t)\right]\left[1 + \overline{\beta(t)}\,\beta(t)\right] = 0,$$

а уравнение $M\Phi(t) = 0$ не имеет нетривиальных решений, так как все его частные индексы равны нулю.

Отсюда вытекает, что система (1) сингулярных интегральных уравнений эквивалентна следующей системе интегральных уравнений Фредгольма:

$$M\overline{(QK)}'\,QK\varphi(t) = M\overline{(QK)}'\,Qg(t).$$

Из сравнения этого выражения с равенством (1) получаем, что эквивалентно-регуляризирующим оператором для системы (1) будет оператор

$$R = M\overline{(QK)}'\,Q, \quad \text{где } Q = (NP)^0.$$

В заключение приношу глубокую благодарность проф. Ф. Д. Гахову за ценные замечания при выполнении этой работы.

Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило 19 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Купрадзе, Сообщ. АН Груз. ССР, **2**, № 9, 793 (1941). [2] И. Н. Векуа, там же, **3**, № 9, 869 (1942). [3] Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, 1950. [4] В. Д. Купрадзе, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, 1950.