Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 1

МАТЕМАТИКА

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ РЯДА АБЕЛЯ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 VI 1951)

Обозначим через A множество функций, допускающих при $x > a$ производные всех порядков, через x_0 — действительное число, большее a, и через

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

арифметическую прогрессию с положительной разностью

$$\tau = x_{n+1} - x_n.$$

Будем называть функцию $f(x)$ из A положительно определенной, если выполнены неравенства

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant 0$$

при $a < x \leqslant x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Подобные неравенства ввел впервые С. Н. Бернштейн ([1], [2]).

Примером положительно определенных функций могут служить полиномы Абеля

$$P_n(x) = \frac{(x_0 - x)(x_n - x)^{n-1}}{n!} \tag{1}$$

и их линейные комбинации с неотрицательными коэффициентами.

В множестве A можно установить некоторый неполный порядок (ω), если условиться писать $f_2(x) \subset f_1(x)$ в тех случаях, когда разность $f_1(x) - f_2(x)$ положительно определена.

Мы будем называть положительно определенную, неисчезающую тождественно функцию $f(x)$ из A *неразложимой* относительно неполного расположения (ω), если она колинеарна со всеми своими положительно определенными минорантами, т. е. если для нее из неравенств

$$0 \subset \varphi(x) \subset f(x), \quad \text{где } \varphi(x) \in A,$$

следует равенство $\varphi(x) = Cf(x)$, где C — некоторая постоянная.

Нетрудно убедиться, что при рассматриваемом неполном расположении (ω) интерполяционные полиномы Абеля (1) неразложимы, т. е. что из неравенств

$$0 \leqslant (-1)^k \varphi^{(k)}(x) \leqslant (-1)^k P_n^{(k)}(x), \quad \varphi(x) \in A,$$

выполненных при $a < x \leqslant x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, вытекает равенство $\varphi(x) = CP_n(x)$, где C — некоторая постоянная.

Таким образом, вопрос о разложении данной функции $F(x)$ в ряд Абеля

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{(x_0 - x)(x_\nu - x)^{\nu-1}}{\nu!}$$

можно рассматривать как вопрос о разложении этой функции в ряд по неразложимым функциям полуупорядоченного линейного пространства A при неполном расположении (ω).

Недавно мы показали [3], однако, что кроме полиномов Абеля (1) в A существуют и другие неразложимые относительно (ω) функции. Таковой является функция

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,P_n(x)}{n^{n-1}\tau^{n-1}} = (x_0 - x)\, e^{\frac{x_0 - x}{\tau}}. \qquad (2)$$

Далее можно показать, что функции

$$e^{\lambda(x_0 - x)} - e^{\mu(x_0 - x)}, \quad \text{где } \lambda e^{-\lambda\tau} = \mu e^{-\mu\tau}, \quad 0 < \mu < \frac{1}{\tau} < \lambda, \qquad (3)$$

также неразложимы, и, кроме функций (1), (2) и (3) и колинеарных с ними функций, других неразложимых функций нет.

Таким образом, возникает вопрос о представлении функций из A в виде линейных комбинаций неразложимых относительно (ω) функций.

Положим для краткости

$$R(x, t) = \frac{e^{\lambda(x_0 - x)} - e^{\mu(x_0 - x)}}{\lambda - \mu} \quad \text{при } 0 < t < 1,$$

где

$$\tau\lambda e^{1-\lambda\tau} = \tau\mu e^{1-\mu\tau} = t, \quad 0 < \mu < \frac{1}{\tau} < \lambda$$

и

$$R(x, 1) = (x_0 - x)\, e^{\frac{x_0 - x}{\tau}}.$$

Наш главный результат можно сформулировать следующим образом:

Теорема. *Функцию $F(x)$ из A можно представить в виде*

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{(x_0 - x)(x_\nu - x)^{\nu-1}}{\nu!} + \int_0^1 R(x, t)\, d\alpha(t) \qquad (4)$$

при $x > a$, где коэффициенты a_ν неотрицательны, а функция $\alpha(t)$ монотонно возрастает при $0 < t \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда функция $F(x)$ положительно определена относительно (ω), т. е. когда

$$(-1)^k F^{(k)}(x) \geqslant 0$$

при $a < x \leqslant x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

При этом интеграл надо понимать в смысле

$$\int_0^1 R(x, t)\, d\alpha(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 R(x, t)\, d\alpha(t).$$

В нашем доказательстве играют существенную роль следующие две леммы:

Лемма 1. *Если функция $\varphi(x)$ из A положительно определена относительно (ω) и если*

$$\varphi^{(k)}(x_k)=0, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

то

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[\varphi(x)+\tau e\varphi'(x+\tau)\right]\geqslant 0$$

при $a<x\leqslant x_k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ldots$ Постоянную τe нельзя заменить большей, как это можно установить, выбрав $\varphi(x)=(x_0-x)e^{\frac{x_0-x}{\tau}}$.

Лемма 2. *Если функция $\varphi(x)$ из A положительно определена относительно (ω) и удовлетворяет условиям* [13]

$$\varphi(x)+\tau e\varphi'(x+\tau)=0$$

и

$$\varphi(x_0)=0,$$

то

$$\varphi(x)=-\varphi'(x_0)(x_0-x)e^{\frac{x_0-x}{\tau}}.$$

Разложение (4) *определено однозначно, если функция $\alpha(t)$ нормирована соответствующим образом. Коэффициенты a_ν имеют значение $a_\nu=(-1)^\nu F^{(\nu)}(x_\nu)$.*

В качестве примера рассмотрим ряд Абеля

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x(\nu\tau-x)^{\nu-1}}{\nu(1+\nu\tau)^{\nu}},$$

который соответствует функции $\ln(1+x)$ при $x_0=0$. Альфан [4] обратил внимание на то, что этот ряд сходится на всей комплексной плоскости при $\tau\neq 0$, но его сумма не равна $\ln(1+x)$, как полагал Абель [5], ни в какой области. Функцию $\ln(1+x)$, однако, можно представить при помощи рассматриваемого нами обобщенного «ряда» Абеля при $a=-1$, $x_0=0$ и при любом $\tau>0$, так как функция $-\ln(1+x)$ положительно определена.

Отметим следующие свойства неполного расположения (ω):

1. Если функции некоторого множества M из A имеют общую мажоранту относительно расположения (ω), то среди мажорант множества M имеется наименьшая [6].

2. Предельная функция сходящейся последовательности

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ldots$$

положительно определенных относительно (ω) функций из A всегда положительно определенная функция из A.

Полуупорядоченное линейное пространство A можно изучать, как мы это недавно делали [6], пользуясь общей теорией линейных полуупорядоченных пространств [7]. Отметим, однако, что в A мы можем иметь конечные множества функций, которые не имеют общей мажоранты (это обстоятельство не является препятствием для наших целей). Так например, функция $\sin x$ и постоянная 0 не имеют общей мажоранты относительно (ω) при $a=-\infty$, $x_0=0$ и $\tau=\pi/2$. В самом деле, если предположить противное, то нетрудно доказать, что функцию $\sin x$ можно представить в виде (4), причем $a_\nu=0$ и $\alpha(t)$ — некоторая функция с ограниченным изменением при $0 < t \leqslant 1$. Таким образом, при всех значениях x будем иметь

$$\sin x = \int_0^1 R(x, t)\, d\alpha(t),$$

что, очевидно, неверно, так как

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^1 R(x, t)\, d\alpha(t) = 0.$$

Исследование остаточного члена ряда Абеля, которому посвящена наша работа ([8]), и настоящая заметка в известном смысле аналогичны исследованию остаточного ряда Гончарова — Лидстона ([9], [10]), которое провел С. Н. Бернштейн ([11]).

В заключение заметим, что обобщенный «ряд» Абеля (4) в некоторых случаях весьма удобен для приложений к так называемым дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом ([12]).

Софийский университет
София, Болгария

Поступило
21 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Бернштейн, Math. Ann., 75, 449 (1914). [2] С. Бернштейн, Atti Congr. Bologna, 2, 267 (1930). [3] Я. Тагамлицкий, ДАН, 75, 337 (1950). [4] D. H. Halphen, C. R., 97 (1883). [5] N. H. Abel, Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes, Oeuvres, sompletes, 2. (1881). [6] Я. Тагамлицкий, Годишник на Софийския Университет, 45, 263 (1948—1949). [7] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М. — Л., 1950. [8] Я. Тагамлицкий, Годишник на Софийския Университет, 46, 385 (1949—1950). [9] W. Gontcharoff, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup., 47, 1 (1930). [10] G. T. Lindstone, Proc. Edinbourgh Math. Soc., 2, 16 (1930). [11] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 381 (1950). [12] А. Д. Мышкис, Усп. матем. наук, 4, 99 (1949); 5, 148 (1950). [13] F. Schürer, Lpzg. Ber. (math.-phys.), 64, 167 (1912).