Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

П. Т. БУГАЕЦ

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА, ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 V 1951)

Настоящая заметка посвящена распространению на двумерный случай результата С. М. Никольского ([1], [2]). А. С. Безлюдный ([3]) распространил этот результат на двумерный случай для класса функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

1) $|f(x+h,\ y+g)-f(x,\ y)| \leqslant M|h|^\alpha + N|g|^\beta$;
2) $|f(x+h,\ y+g)-f(x,\ y+g)-f(x+h,y)+f(x,y)| \leqslant K|h|^\alpha |g|^\beta$.

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть H — класс 2π-периодических относительно каждой из переменных x и y функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условию*

$$|f(x+h,\ y+g)-f(x,y)| \leqslant M|h|^\alpha + N|g|^\beta \tag{1}$$

и

$$\overline{S}_{mn}(f,x,y) = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{-\pi\leqslant x_k^{(m)}<\pi} \sum_{-\pi\leqslant y_l^{(n)}<\pi} D_m(x-x_k^{(m)})\, D_n(y-y_l^{(n)})\, f(x_k^{(m)},\ y_l^{(n)}),$$

где $D_m(u) = \dfrac{\sin(m+1/2)u}{2\sin(u/2)}$; $x_k^{(m)} = \dfrac{2k\pi}{2m+1}$, $y_l^{(n)} = \dfrac{2l\pi}{2n+1}$, $\pm k = 0, 1, \ldots, m$, $\pm l = 0, 1, \ldots, n$, *интерполяционный тригонометрический многочлен порядка* (mn), *совпадающий с* $f(x, y)$ *в точках* $(x_k^{(m)},\ y_l^{(n)})$.

Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}_{mn}^{(\alpha,\beta)} = \sup_{f\in H} |\overline{S}_{mn}(f,x,y) - f(x,y)| = \frac{2\ln m \ln n}{\pi^2}\left|\sin\frac{2m+1}{2}x \sin\frac{2n+1}{2}y\right| \min\left\{\frac{M\pi^\alpha}{m^\alpha},\ \frac{N\pi^\alpha}{n^\beta}\right\} + \rho_{mn}, \tag{2}$$

где

$$\rho_{mn} = O\left\{(\ln m + \ln n)\left(\frac{1}{m^\alpha} + \frac{1}{n^\beta}\right)\right\}.$$

При доказательстве этой теоремы мы будем предполагать, что x и y удовлетворяют неравенствам $0 < x < h$, $0 < y < g$, где $h = \frac{2\pi}{2m+1}$, $g = \frac{2\pi}{2n+1}$, так как при $x = 0$, $y = 0$, $x = h$, $y = g$ теорема очевидна. Кроме того, если $f \in H$, то функция f_1, определяемая равенством

$$f_1(t, z) = f(t - h, z - g),$$

также принадлежит к H и при этом для любых x и y имеет место соотношение

$$f(x, y) - \widetilde{S}_{mn}(f, x, y) = f_1(x + h, y + g) - \widetilde{S}_{mn}(f_1, x + h, y + g),$$

откуда следует, что

$$\mathcal{E}_{mn}^{(\alpha, \beta)}(H; x, y) = \mathcal{E}_{mn}^{(\alpha, \beta)}(H; x + h, y + g).$$

Заметим еще, что величина верхней грани не изменится, если ее распространить на более узкий класс функций H_{xy}, принадлежащих к H и таких, что $f(x, y) = 0$. Итак,

$$\mathcal{E}_{mn}^{(\alpha, \beta)} = \sup_{f \in H_{xy}} |\widetilde{S}_{mn}(f, x, y)|.$$

Для доказательства соотношения (2) введем обозначения

$$D_k^{(m)} = D_m(x - x_k^{(m)}), \quad \overline{D_l^{(n)}} = D_n(y - y_l^{(n)}), \quad f(x_k^{(m)}, y_l^{(n)}) = f_{k,l}$$

и перепишем выражение для $\widetilde{S}_{mn}(f, x, y)$ в виде:

$$\widetilde{S}_{mn}(f, x, y) = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} D_k^{(m)} \overline{D_l^{(n)}} f_{k,l} + \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=1}^{n} D_{-k}^{(m)} \overline{D_l^{(n)}} f_{-k,l} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} D_{-k}^{(m)} \overline{D_{-l}^{(n)}} f_{-k,-l} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{n} D_k^{(m)} \overline{D_{-l}^{(n)}} f_{k,-l} \right\}. \tag{3}$$

Полагая для краткости, как в ([1], [2]),

$$d_k^{(m)} = \sum_{i=k}^{m} D_i^{(m)} \quad (k = 1, 2, \ldots, m); \quad \overline{d_l^{(n)}} = \sum_{i=l}^{n} \overline{D_i^{(n)}} \quad (l = 1, 2, \ldots, n);$$

$$d_k^{(m)} = \sum_{i=-m}^{k} D_i^{(m)} \quad (k = -m, \ldots, 0); \quad \overline{d_l^{(n)}} = \sum_{i=-n}^{l} \overline{D_i^{(n)}} \quad (l = -n, \ldots, 0);$$

$$\Delta_x f_{k,l} = f_{k,l} - f_{k-1,l}; \quad \Delta_y f_{k,l} = f_{k,l} - f_{k,l-1};$$
$$\Delta^2 f_{k,l} = f_{k,l} - f_{k-1,l} - f_{k,l-1} + f_{k-1,l-1}$$

и применяя к каждому слагаемому правой части (3) преобразование Абеля, получим

$$\widetilde{S}_{mn}(f, x, y) = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \left\{ \left[\sum_{k=2}^{m} \sum_{l=2}^{n} d_k^{(m)} \overline{d_l^{(n)}} \Delta^2 f_{k,l} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=2}^{n} d_{-k}^{(m)} \overline{d_l^{(n)}} \Delta^2 f_{-k,l} + \right. \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} d_{-k}^{(m)} \overline{d_{-l}^{(n)}} \Delta^2 f_{-k,-l} + \sum_{k=2}^{m} \sum_{l=1}^{n} d_k^{(m)} \overline{d_{-l}^{(n)}} \Delta^2 f_{k,-l} \right] +$$
$$+ \left[d_1^{(m)} \sum_{l=2}^{n} \overline{d_l^{(n)}} \Delta_y f_{1,l} + \overline{d_1^{(n)}} \sum_{k=2}^{m} d_k^{(m)} \Delta_x f_{k,1} + d_0^{(m)} \sum_{l=2}^{n} \overline{d_l^{(n)}} \Delta_y f_{0,l} + \right.$$

$$+ d_1^{(n)} \sum_{k=1}^{m} d_{-k}^{(m)} \Delta_x f_{-k,\,1} + d_0^{(m)} \sum_{l=1}^{n} \overline{d_{-l}^{(n)}} \Delta_y f_{0,\,-l} + \overline{d_0^{(n)}} \sum_{k=1}^{m} d_{-k}^{(m)} \Delta_x f_{-k,\,0} +$$

$$+ \overline{d_0^{(n)}} \sum_{k=2}^{m} d_k^{(m)} \Delta_x f_{k,\,0} + d_1^{(m)} \sum_{l=1}^{n} \overline{d_{-l}^{(n)}} \Delta_y f_{1,\,-l} \Big] +$$

$$+ \left[d_1^{(m)} \overline{d_1^{(n)}} f_{11} + d_0^{(m)} \overline{d_1^{(n)}} f_{0,\,1} + d_1^{(m)} \overline{d_0^{(n)}} f_{1,\,0} + d_0^{(m)} \overline{d_0^{(n)}} f_{0,\,0} \right] \Big\}. \qquad (4)$$

В силу условия (1) и соотношения $d_k^{(m)} = O(m)$, будем иметь

$$\frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \left[d_1^{(m)} \overline{d_1^{(n)}} f_{1,\,1} + d_0^{(m)} \overline{d_1^{(n)}} f_{0,\,1} + d_1^{(m)} \overline{d_0^{(n)}} f_{1,\,0} + d_0^{(m)} \overline{d_0^{(n)}} f_{0,\,0} \right] =$$
$$= O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}).$$

Для оценки дальнейших членов правой части (4), заметим (см. ([1]) или ([2])), что

$$\frac{1}{2m+1} \sum_{k=1}^{m} | d_k^{(m)} | = \frac{1}{4\pi} \left| \sin \frac{2m+1}{2} x \right| \ln m + O(1). \qquad (5)$$

С помощью этого соотношения и условия (1) нетрудно установить, что

$$\frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \Big[d_1^{(m)} \sum_{l=2}^{n} | \overline{d_l^{(n)}} \Delta_y f_{1,\,l} | + \overline{d_1^{(n)}} \sum_{k=2}^{m} | d_k^{(m)} \Delta_x f_{k,\,1} | +$$

$$+ d_0^{(m)} \sum_{l=2}^{n} | \overline{d_l^{(n)}} \Delta_y f_{0,\,l} | + \overline{d_1^{(n)}} \sum_{k=1}^{m} | d_{-k}^{(m)} \Delta_x f_{-k,\,1} | + d_0^{(m)} \sum_{l=1}^{n} | \overline{d_{-l}^{(n)}} \Delta_y f_{0,\,-l} | +$$

$$+ \overline{d_0^{(n)}} \sum_{k=1}^{m} | d_{-k}^{(m)} \Delta_x f_{-k,\,0} | + \overline{d_0^{(n)}} \sum_{k=2}^{m} | d_k^{(m)} \Delta_x f_{k,\,0} | + d_1^{(m)} \sum_{l=1}^{n} | \overline{d_{-l}^{(n)}} \Delta_y f_{1,\,-l} | \Big] \leqslant$$

$$\leqslant O\left(\frac{\ln m}{m^\alpha} \right) + O\left(\frac{\ln n}{n^\beta} \right).$$

Если еще примем во внимание, что, в силу (1) и (5), справедливо

$$\frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=2}^{n} | d_{-k}^{(m)} \overline{d_l^{(n)}} \Delta^2 f_{-k,\,l} | =$$

$$= \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{k=2}^{m} \sum_{l=2}^{n} | d_k^{(m)} \overline{d_l^{(n)}} \Delta^2 f_{k,\,l} | + O\left\{ \ln n \left(\frac{1}{m^\alpha} + \frac{1}{n^\beta} \right) \right\}$$

и что подобные равенства имеют также место для третьей и четвертой двойных сумм, стоящих в правой части (4), то получим

$$| \widetilde{S}_{mn}(f,\,x,\,y) | \leqslant \frac{16}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{k=2}^{m} \sum_{l=2}^{n} | d_k^{(m)} d_l^{(n)} | \, | \Delta^2 f_{k,\,l} | + \rho_{mn}. \qquad (6)$$

Принимая во внимание (5) и замечая, что, в силу (1),

$$| \Delta^2 f_{k,\,l} | \leqslant 2 \min \{ M |h|^\alpha, \; N |g|^\beta \},$$

мы можем (6) представить в виде

$$|S_{mn}(f, x, y)| \leqslant \frac{2 \ln m \ln n}{\pi^2} \left| \sin \frac{2m+1}{2} x \sin \frac{2n+1}{2} y \right| \min \left\{ \frac{M\pi^\alpha}{m^\alpha}, \frac{N\pi^\beta}{n^\beta} \right\} + \rho_{mn}. \tag{7}$$

Докажем, что в этом соотношении возможен знак равенства. Для этого определим экстремальную функцию $f_{mn}(t, z)$ следующим образом: положим

$$f_{mn}(t, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant y_2^{(n)} + \frac{g}{2^{1/\beta}}; \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant z \leqslant \pi \quad 0 \leqslant t \leqslant x_2^{(m)} + \frac{h}{2^{1/\alpha}}; \\ \min\left\{ M\left[\frac{h^\alpha}{2} - (t - x_2^{(m)})^\alpha\right], N\left[\frac{g^\beta}{2} - (z - y_2^{(n)})^\beta\right]\right\}, & \\ \quad \text{если } x_2^{(m)} + \frac{h}{2^{1/\alpha}} \leqslant t \leqslant x_3^{(m)}, \quad y_2^{(n)} + \frac{g}{2^{1/\beta}} \leqslant z \leqslant y_3^{(n)}. \end{cases}$$

В остальных точках прямоугольника $0 \leqslant t, z \leqslant \pi$ определим $f_{mn}(t, z)$ так, чтобы в прямоугольнике

$$x_2^{(m)} + \frac{h}{2^{1/\alpha}} \leqslant t \leqslant \pi, \quad y_2^{(n)} + \frac{g}{2^{1/\beta}} \leqslant z \leqslant \pi$$

она удовлетворяла следующим условиям:

$$f_{mn}(x_k^{(m)} + t, z) = -f_{mn}(x_{k+1}^{(m)} + t, z),$$
$$f_{mn}(t, y_l^{(n)} + \eta) = -f_{mn}(t, y_{l+1}^{(n)} + \eta).$$

В результате такого определения

$$|f_{mn}(x_k^{(m)}, y_l^{(n)})| = \min\left\{M \frac{h^\alpha}{2}, N \frac{g^\beta}{2}\right\},$$

а

$$\operatorname{sign} f_{mn}(x_k^{(m)}, y_l^{(n)}) = \operatorname{sign} d_k^{(m)} d_l^{(n)}.$$

Аналогично функция $f_{mn}(t, z)$ определяется в остальных четвертях квадрата $-\pi \leqslant t, z \leqslant \pi$. Нетрудно убедиться, что $f_{mn}(t, z) \in H$. Подставив функцию $f_{mn}(t, z)$ в (4), получим правую часть (7). Этим (2) доказано.

Поступило
22 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, ДАН, **31**, № 3 (1941). [2] С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 15 (1945). [3] А. С. Безлюдный, ДАН, **65**, № 3 (1949).