Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 1

МАТЕМАТИКА

В. И. ЛЕВИН

ПРЕДЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 31 VI 1951)

Если имеется асимптотическое разложение

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-\gamma-nr} \qquad (1)$$

функции действительного переменного t, определенной для всех достаточно больших значений своего аргумента, где γ и $r > 0$ — произвольные действительные числа, то, как известно, это разложение может быть использовано для приближенного вычисления значений $f(t)$ и в том случае, когда ряд (1) расходится *. Однако для каждого (достаточно большого) значения t существует определенная «граница точности» представления $f(t)$ отрезками ее асимптотического разложения:

$$r(t) = \inf_{N \geqslant 0} \left| f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^{-\gamma-nr} \right|,$$

отличная от нуля, если это разложение не является сходящимся рядом. Величина $r(t)$ представляет собой наименьшую ошибку, с которой функция $f(t)$ может быть вычислена при данном значении t из своего асимптотического разложения, и обладает, таким образом, весьма большой практической важностью. Отметим, что для тех значений t, для которых ряд (1) расходится, существует такое конечное N_t, что

$$r(t) = \left| f(t) - \sum_{n=0}^{N_t} a_n t^{-\gamma-nr} \right|,$$

тогда как в случае сходимости этого ряда к функции $f(t)$

$$r(t) = \lim_{N \to \infty} \left| f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^{-\gamma-nr} \right| = 0.$$

* Соотношение (1) означает, что для каждого $N = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{t \to \infty} t^{\gamma+Nr} \left\{ f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^{-\gamma-nr} \right\} = 0.$$

Точное нахождение $r(t)$ для конечных значений t представляет даже в самых простейших случаях очень большие трудности, и здесь приходится ограничиваться более или менее грубыми оценками *. Оказывается, однако, возможным точно определить асимптотическое поведение $r(t)$ при больших значениях t. Это удается сделать для функций $f(t)$, обладающих сравнительно простыми, с теоретико-функциональной точки зрения, преобразованиями Лапласа. Относящиеся сюда результаты содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_\zeta(t)$ — функция, преобразование Лапласа которой равно*

$$\varphi_\zeta^*(p) = (p-p_0)^{\gamma-1}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{A_\mu}{\{(p-p_0)^r-\zeta^r\}^\mu} \qquad (A_m \neq 0),$$

где $r = r'/r''$, $r' > 0$, $(r', r'') = 1$, — рациональное положительное число $\gamma < r$, p — комплексная переменная, p_0 и $\zeta \neq 0$ — фиксированные комплексные числа, причем плоскость p предполагается разрезанной вдоль луча $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} p_0$, $\operatorname{Re} p < \operatorname{Re} p_0$, а $\arg(p-p_0)$ заключен между $-\pi$ и π; кроме того, предположим, что полюсы $\varphi_\zeta(p)$ не лежат на разрезе.

Тогда функция

$$f_\zeta(t) = e^{-p_0 t}\left\{\varphi_\zeta(t) - \sum_{l=0}^{r'-1}\operatorname{res}\varphi_\zeta^*(p)\,e^{pt}\Big|_{p=p_0+\zeta e^{\frac{2l\pi i}{r}}}\right\}$$

имеет асимптотическое разложение (расходящееся)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n t^{-\gamma-nr},$$

где

$$\alpha_n = \sum_{\mu=1}^{m}(-1)^\mu\frac{(n+\mu-1)!}{n!\,(\mu-1)!}\,\frac{1}{\Gamma(-\gamma+1-nr)}\,\frac{A_\mu}{\zeta^{n+\mu}}.$$

Далее, для абсолютной величины отношения разности

$$r_N(t) = f_\zeta(t) - \sum_{n=0}^{N}\alpha_n t^{-\gamma-nr}$$

к $(n+1)$-му члену разложения

$$\lambda_N(t) = \left|\frac{r_N(t)}{\alpha_{N+1}\,t^{-\gamma-(N+1)r}}\right|$$

имеет место следующее соотношение

$$\lambda_N(t) = \left|\frac{\zeta^{2r}-\zeta^r\tau^r\dfrac{\sin\nu_{N-1}\pi}{\sin\nu_N\pi}}{\zeta^{2r}-2\zeta^r\tau^r\cos r\pi+\tau^{2r}}\right| + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

---

* В литературе на некоторых простейших конкретных примерах обычно устанавливается, что асимптотический ряд следует обрывать на члене, предшествующем наименьшему по модулю (при данном t), причем совершаемая при этом ошибка по своей абсолютной величине не будет превосходить модуля первого отброшенного, т. е. наименьшего при данном t, члена разложения. Для неполной гамма-функции, асимптотическое разложение которой получается простым интегрированием по частям, известно, что ошибка не превосходит половины первого отброшенного члена. Однако никаких общих соображений по этому вопросу нигде не приводится. См., например, ([1–3]).

где

$$\nu_N = \gamma - 1 + (N+1) r = \tau t - \eta, \quad 0 \leqslant \eta < r,$$

причем $\tau \neq 0$ — *фиксированное число* (*так что при* $N \to \infty$ *и* $t \to \infty$, *и наоборот*) *.

При наличии формального асимптотического разложения (как это часто встречается при изучении специальных функций) этот результат дает возможность оценить, при достаточно больших t, ошибку любой частной суммы разложения в отношении к первому неучтенному члену. Следует отметить, что дробь $\frac{\sin \nu_{N-1}\pi}{\sin \nu_N \pi}$ принимает конечное число значений.

В простейшем, но весьма важном для приложений случае целочисленного r из теоремы 1 следует теорема 2.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 предположим, что* r — *целое положительное число* ($r = r'$, $r'' = 1$). *Тогда для наименьшей ошибки* $r(t)$, *с которой функция*

$$f_\zeta(t) = e^{-p_0 t} \left\{ \varphi_\zeta(t) - \sum_{l=0}^{r-1} \operatorname{res} \varphi_\zeta^*(p) e^{pt} \Big|_{p = p_0 + \zeta e^{\frac{2 l \pi i}{r}}} \right\}$$

может быть при данном значении $t > 0$ *приближена частными суммами своего асимптотического разложения, имеют место следующие соотношения:*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{r(t)}{\rho(t)} = e^r, \quad \underline{\lim_{t \to \infty}} \frac{r(t)}{\rho(t)} = 1,$$

где

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} |\sin \gamma \pi| \frac{|A_m|}{(m-1)! \, r^{m-1}} \frac{|\zeta|^{r-(r-1)m+\gamma-3/2}}{|\zeta^r - (-1)^r |\zeta|^r|} t^{m-1/2} e^{-|\zeta| t}.$$

Здесь γ *предполагается нецелым числом, ибо в случае целого* γ *функция* $f_\zeta(t)$ *разлагается в ряд по отрицательным степеням* t, *сходящийся для всех достаточно больших значений* t, *т. е.* $r(t) = 0$ *для таких* t.

Более того, для любого ϑ, $0 < \vartheta < 1$, существует такая последовательность значений $t \to \infty$, для которой существует

$$\lim \frac{r(t)}{\rho(t)} = e^{\vartheta r}.$$

Отметим, что, таким образом, порядок $r(t)$ зависит в основном от $|\zeta|$, т. е. от расстояния полюсов преобразования Лапласа от его точки ветвления (в данном случае все полюсы находятся от нее на одинаковом расстоянии), и что коэффициент при $t^{m-1/2} e^{-|\zeta| t}$ в выражении для $\rho(t)$ стремится к бесконечности при приближении одного из этих полюсов к разрезу.

Утверждение теоремы 2 может быть обобщено на значительно более широкий класс функций.

---

* Для преобразования Лапласа неполной гамма-функции $r = 1$, т. е. $\frac{\sin \nu_{N-1}\pi}{\sin \nu_N \pi} = -1$, и ζ — действительное положительное число, так что в этом случае $\lambda_N(t) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{t}\right)$. Можно еще показать, что $O\left(\frac{1}{t}\right)$ отрицательно для достаточно больших t.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(t)$ имеет преобразование Лапласа $\varphi^*(p)$, которое представимо в виде*

$$\varphi^*(p) = z^{\gamma-1} G_0(z) + \sum_{\varkappa=1}^{k} z^{\gamma_\varkappa - 1} G_\varkappa(z),$$

где $z = p - p_0$, $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$, $\gamma_\varkappa < r_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, $r_\varkappa$ — положительные целые числа, $G_0(z)$ — целая функция,

$$G_\varkappa(z) = \sum_{\mu=1}^{m_\varkappa} \frac{A_\mu^{(\varkappa)}}{(z^{r_\varkappa} - \zeta_\varkappa^{r_\varkappa})^\mu},$$

причем $\zeta_\varkappa \neq 0$ и ни один из полюсов функций $G_\varkappa(z)$ не лежит на разрезе $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} p_0$, $\operatorname{Re} p < \operatorname{Re} p_0$. Кроме того, предположим, что оригинал преобразования Лапласа $z^{\gamma-1} G_0(z)$ разлагается в сходящийся ряд по отрицательным степеням t.*

Тогда для наименьшей ошибки $r(t)$, с которой функция

$$f(t) = e^{-p_0 t} \left\{ \varphi(t) - \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{l=0}^{r_\varkappa} \operatorname{res} z^{\gamma_\varkappa - 1} G_\varkappa(z) e^{(z+p_0)t} \Big|_{z = \zeta_\varkappa e^{\frac{2l\pi i}{r_\varkappa}}} \right\}$$

может быть при данном значении $t > 0$ приближена частными суммами своего асимптотического разложения, имеет место следующее неравенство:

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{r(t)}{\rho(t)} \leqslant e^r,$$

где

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_\lambda |\sin \gamma_\lambda \pi| \frac{|A_m^{(\lambda)}|}{(m-1)!\, r_\lambda^{m-1}} \frac{\rho^{r_\lambda - (r_\lambda - 1)m + \gamma_\lambda - 3/2}}{|\zeta_\lambda^{r_\lambda} - (-1)^{r_\lambda} \rho^{r_\lambda}|} t^{m - 1/2} e^{-\rho t},$$

а сумма по λ простирается на те $\zeta_\varkappa$ с наименьшим модулем $\rho = \min\limits_\varkappa |\zeta_\varkappa|$, которые являются полюсами наивысшего порядка $m = \max\limits_\lambda m_\lambda$, и $r = \max\limits_\lambda r_\lambda$. Здесь не все γ_λ предполагаются целыми, ибо в противном случае рассматриваемое асимптотическое разложение превращается в сходящееся, и $r(t) = 0$ для всех достаточно больших t.

Поступило
8 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, 2-е изд., М.—Л., 1935. [2] Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, М.—Л., 1936, ч. 1, гл. 8. [3] H. Jeffreys and B. Jeffreys, Methods of Mathematical Physics, Cambridge, 1950, 17, 03.

* Т. е. что к этому преобразованию Лапласа применимо так называемое правило дробных показателей операционного исчисления.