

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИАЛГЕБРОИДНЫХ И АЛГЕБРОИДНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Будем называть функцию $f(x)$, квазиалгеброидной на данном отрезке ($f(x) \in A$), если существует такой многочлен $P(x)$, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n f(x) P(x)}{E_n f(x)} = 0. \quad (A)$$

Нетрудно видеть, что если (A) выполняется при некотором $P(x)$, то существует один и только один многочлен $D_k(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ наиминимальшей степени $k > 0$, удовлетворяющий (A); этот многочлен $D_k(x)$ назовем характеристическим многочленом функции $f(x)$, а корни его (где бы они ни находились) назовем характеристическими точками.

Теорема 1. Если $R \geq R_i = |x_i + \sqrt{x_i^2 - 1}| \geq r$, где x_i — характеристические точки функции $f(x)$, то

$$\frac{1}{R} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n f(x)} \leq \frac{1}{r} \leq 1. \quad (1)$$

Следствие 1. Если $R = r = 1$, т. е. все характеристические точки находятся на $(-1, +1)$, то функция $f(x)$ не может быть аналитической (регулярной) на этом отрезке ($\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n f(x)} = 1$).

Следствие 2. Если все характеристические точки находятся вне отрезка $(-1, +1)$, т. е. $r > 1$, то $f(x)$ — аналитическая функция, регулярная внутри эллипса с полусуммой осей r .

Следствие 3. Квазиалгеброидная функция не может быть целой функцией.

Вывод правой части неравенства (1) основан на следующем общем предложении, сформулированном в моей заметке⁽¹⁾, общее доказательство которого аналогично данному мною там же в частном случае:

Лемма 1. Пусть функция $\Phi_1(z)$ регулярна и ограничена ($|\Phi_1(z)| < M$) внутри эллипса S с полусуммой осей r_1 . Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n(\Phi_0(x))} = \frac{1}{\rho}$ ($1 \leq \rho < r_1$), то $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ в неравенстве

$$E_n(\Phi_0(x) \Phi_1(x)) < \left[\frac{2Mr_1}{r_1 - \rho} + \varepsilon_n \right] E_n(\Phi_0(x)). \quad (2)$$

* Если $E_n f(x)$ означает здесь наилучшее приближение $f(x)$ на основном отрезке (a, b) , то $f(x) \in A$ на этом отрезке (a, b) . В конкретных формулах (при отсутствии особых указаний) мы будем полагать $b = -a = 1$. Обычно будем считать $f(x)$ непрерывной, т. е. $E_n f(x) \rightarrow 0$; но условие (A) применимо и к функции с конечным числом точек разрыва, если она становится непрерывной после умножения на соответствующий многочлен.

Применяя лемму 1, положим $\Phi_0(x) = f(x) D_k(x)$, $\Phi_1(x) D_k(x) = 1$, таким образом, если взять $r_1 < r$ сколь угодно близким к r , то при иррегулярности $\Phi_0(z)$ в какой-нибудь точке внутри эллипса C мы имели бы для бесчисленного множества значений n

$$E_n f(x) < h E_n (f(x) D_k(x)) \quad (h - \text{постоянная}),$$

что противоречит условию квазиалгеброидности (A). Но если $f(x) D_k(x)$ должна быть регулярной внутри эллипса C , то $f(x)$ также регулярна в этой области.

Метод доказательства левой части неравенства (1) при любом $R \geq 1$ тот же, что при $R = 1$; поэтому для определенности остановимся лишь на случае $R = 1$ (соответствующем следствию 1). Нужно, следовательно, показать недопустимость при $R = 1$ предположения, что $f(x)$ и, тем более, $f(x) D_k(x)$ регулярны на отрезке $(-1, +1)$. Для этого, учитывая, что из предположения регулярности следует сходимость рядов по многочленам Чебышева

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \quad f(x) D_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(x), \quad (3)$$

имеем для всех $n > 0$ на основании известных⁽²⁾ оценок наилучших приближений неравенства вида

$$\frac{E_n f(x) D_k(x)}{E_n f(x)} > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|b_{n+1}|}{\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|} = c_{n+1}. \quad (4)$$

При этом $\overline{\lim}_{n=\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{\rho} < 1$. Поэтому при заданном $\varepsilon > 0$, достаточно малом для того, чтобы было $\rho_1 = \rho - \varepsilon > 1$, существует бесконечная последовательность таких значений $n = n_j$ ($j = 1, 2, \dots$), что для всех $p \geq -k$ верны неравенства

$$\left| \frac{b_{n_j+p}}{b_{n_j}} \right| \leq \left(\frac{1}{\rho_1} \right)^p. \quad (5)$$

С другой стороны, из уравнений в конечных разностях

$$2b_n = \sum_{i=0}^k p_i (a_{n-i} + a_{n+i})$$

получаем для всех a_{n+k} ($n \geq 0$) абсолютно сходящиеся ряды

$$a_{n+k} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i b_{n+i}, \quad (6)$$

где коэффициенты λ_i ограничены ($|\lambda_i| < L$), если все корни многочлена $D_k(x) = \sum_{i=0}^k p_i T_i(x)$ находятся на отрезке $(-1, +1)$. Таким образом, для всех $l = n_j + h$ имеем, вследствие (5) и (6),

$$|a_l| \leq L |b_{n_j}| \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_1} \right)^{h-k+i} = L |b_{n_j}| \frac{1}{(\rho_1 - 1) \rho_1^{h-k-1}},$$

$$\sum_{l=n_j}^{\infty} |a_l| \leq L |b_{n_j}| \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\rho_1^{k+1}}{(\rho_1 - 1) \rho_1^h} = \frac{L \rho_1^{k+2}}{(\rho_1 - 1)^2} |b_{n_j}| = c |b_{n_j}|.$$

Следовательно, благодаря (4), для всех $n = n_j$ имеем $c_n \geq c$, что противоречит условию (A).

2. Если функция $f(x) D_k(x) \in A$ и имеет характеристический многочлен $D_{k_1}^{(1)}(x)$, то, умножая $f(x)$ на $D_k(x) D_{k_1}^{(1)}(x)$, мы еще более снизим наилучшее приближение. Предположим, что, повторяя ту же операцию конечное число раз, мы получим многочлен $R(x)$, для которого существует такое α ($0 < \alpha < 1$), что при всех достаточно больших n имеем

$$\frac{E_n f(x) R(x)}{E_n f(x)} < \alpha^n \quad (n \rightarrow \infty). \quad (A_R)$$

В таком случае, в соответствии с данным в сноске* определением асимптотичности, функцию $f(x)$ назовем асимптотически рациональной $f(x) \in A_R$. Оправданием последнего термина служит теорема 2.

Теорема 2. Все функции $f(x) \in A_R$ и только они являются аналитическими функциями вида

$$f(x) = \frac{F(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{R(x)} + F_1(x), \quad (7)$$

где $R(x)$ — многочлен, не имеющий корней вне эллипса C с суммой полуосей $R > 1$, $Q(x)$ — многочлен, а $F_1(x)$ и $F(x)$ регулярны внутри эллипса C_1 с суммой полуосей $R_1 > R$.

Действительно, если $f(x)$ вида (7), то условие (A_R) соблюдено при всяком $\alpha > R/R_1$. Наоборот, из (A_R) следует, что функция $F(x) = f(x)R(x)$ регулярна внутри большего эллипса, чем функция $f(x)$. Заметим еще, что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы при повторении указанной операции иметь в неравенстве (A_R) $\alpha \rightarrow 0$, когда степень s многочлена $R(x)$ неограниченно возрастает, состоит в том, что функция $f(x)$ должна быть мерморфной.

3. Сейчас мы дополним условие (A) другим гораздо менее ограничительным условием**, чем (A_R) , и определим класс $A^* \subset A$ алгебраических функций $f(x) \in A^*$, обладающих свойством A^* , что, каков бы ни был многочлен $P(x)$, имеем для всех $n \rightarrow \infty$

$$\text{либо } E_n f(x) P(x) = o[E_n f(x)], \text{ либо } E_n f(x) = O[E_n f(x) P(x)] \quad (A^*)$$

(причем существуют многочлены первой категории).

Из условия (A^*) вытекает для функций $f(x) \in A^*$ следующее

Дополнение к теореме 1. Функции $f(x) \in A^*$ могут быть только двух родов: 1) функция $f(x) \in A^*$ алгеброидная первого рода ($f(x) \in A_1^*$), если все ее характеристические точки x_i находятся вне основного отрезка (a, b) , в этом случае все точки x_i находятся на одном и том же эллипсе*** (с фокусами (a, b)); 2) функция $f(x) \in A^*$ — второго рода ($f(x) \in A_2^*$), когда все ее характеристические точки на отрезке (a, b) .

* Мы будем называть две функции $f(x)$ и $f_1(x)$ ($f_1(x) \approx f(x)$) асимптотичными (на соответствующем отрезке), если $E_n(f(x) - f_1(x)) = o[E_n f(x)]$.

** Из теоремы 2 следует, что $A_R \subset A^*$.

*** Т. е. неравенство (1) превращается в равенство $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n f(x)} = \frac{1}{r}$.

Докажем сначала невозможность предположения, что $D_k(x) = A(x)B(x)$, где все корни $A(x)$ на (a, b) , в то время как корни $B(x)$ вне (a, b) . Действительно, отсюда вытекало бы (вследствие (A^*)), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n f(x) D_k(x)}{E_n f(x) A(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n f(x) D_k(x)}{E_n f(x) B(x)} = 0.$$

Поэтому, в силу теоремы 1, функция $f_1(x) = f(x)A(x)$ регулярна на (a, b) , между тем как $f_2(x) = f(x)B(x)$ нерегулярна на этом отрезке; но это означало бы, что $f(x)$ — аналитическая функция, имеющая, как и $f(x)B(x)$, полюсами корни $A(x)$, т. е. $E_n f(x) = \infty$ и $D_k(x) = A(x)$.

Итак, остается рассмотреть случай $f(x) \in A_1^*$, когда все характеристические точки вне отрезка (a, b) . Если бы корни $A(x)$ находились на эллипсе C , а корни $B(x)$ находились вне этого эллипса, то, вследствие (A^*) , мы имели бы $E_n f_1(x)B(x) = o[E_n f_1(x)]$, т. е. $f_1(x) = f(x)A(x)$ была бы регулярна внутри эллипса регулярности функции $1/B(x)$ (большего, чем эллипс регулярности C рациональной дроби $1/A(x)$). Следовательно, либо $f(x) = f_1(x)/A(x)$ регулярна на C , как и $f_2(x) = f(x)B(x)$, но в этом случае, по теореме 1 (см. левую часть неравенства (1)), характеристическим многочленом функции $f_2(x)$ не мог бы быть многочлен $A(x)$; либо $f(x)$ не имеет на C иных особенностей, кроме полюсов (корней $A(x)$), но тогда $D_k(x) = A(x)$.

Следствие 4. Если $f(x) \in A^*$, то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы многочлен $P(x)$ принадлежал к числу тех, для которых осуществляется (A), состоит в том*, что $P(x)$ должен делиться на характеристический многочлен $D_k(x)$ функции $f(x)$.

Отсюда следует, в частности, что если $f(x) \in A$ и $E_{n+s} f(x) > c_s E_n f(x)$ (где $c_s > 0$ — постоянные не зависящие от n), то $f(x) \in A^*$.

Несмотря на существенное различие природы функций A_1^* и A_2^* (причем, однако**, функции первого рода A_1^* на одних отрезках могут становиться функциями A_2^* на других отрезках), их сближает еще одно общее формальное свойство. Назовем алгеброидную функцию элементарной, если она имеет лишь одну характеристическую точку***; исследование функций A_1^* , как и A_2^* , приводится к исследованию элементарных функций благодаря следующему предложению.

Теорема 3. Всякая функция $f(x) \in A^*$, имеющая характеристический многочлен $D_k(x)$ степени k , является суммой не более k элементарных функций.

Поступило
29 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 461 (1946). ² С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937, стр. 73.

* Иначе говоря, $f(x) \in A^*$ тогда и только тогда, когда условие (A) осуществляется всеми многочленами $P(x)$, делящимися на $D_k(x)$.

** Например, $|a-x|^s \in A_1^*$, если a вне основного отрезка, и $|a-x|^s \in A_2^*$ в противном случае.

*** В следующей заметке будет показано, что в случае A_2^* корни $D_k(x)$ всегда простые. Вероятно, это же свойство обязательно и для $f(x) \in A_1^*$.