Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

А. М. БЕРЕЗМАН

КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР ПОВЕРХНОСТИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 V 1951)

1. Рассмотрим двумерную поверхность в четырехмерном проективном пространстве. Присоединим к каждой точке A_0 этой поверхности проективный репер, образованный пятью аналитическими точками A_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$. Уравнения инфинитезимальных преобразований репера имеют вид $dA_i = \omega_i^k A_k$ $(i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$, где ω_i^k суть линейные дифференциальные формы от 23 переменных, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства [1].

Цель настоящей работы — построить в каждой точке поверхности (A_0) один репер, внутренним образом связанный с поверхностью. Для этого достаточно фиксировать вторичные параметры таким образом, чтобы таблица компонент ω_i^k приняла возможно более простой вид.

2. Если принять плоскость $A_0A_1A_2$ за касательную плоскость, то формы ω^3, ω^4 обратятся в нуль:

$$\omega^3 = 0, \qquad \omega^4 = 0. \tag{1}$$

Дифференцируя уравнения (1) внешним образом и применяя лемму Картана, имеем

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a\omega^1 + b\omega^2, & \omega_1^4 &= \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \\ \omega_2^3 &= b\omega^1 + c\omega^2, & \omega_2^4 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения структуры позволяют получить закон изменения коэффициентов $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ под действием преобразований подгруппы, оставляющей неизменной точку A_0 и касательную плоскость, в виде

$$\begin{aligned} \delta a &= 2b\pi_1^2 - \alpha\pi_4^3 - a(\pi_0^0 - 2\pi_1^1 + \pi_3^3), \\ \delta b &= c\pi_1^2 + a\pi_2^1 - \beta\pi_4^3 - b(\pi_0^0 - \pi_1^1 - \pi_2^2 + \pi_3^3), \\ \delta c &= 2b\pi_2^1 - \gamma\pi_4^3 - c(\pi_0^0 - 2\pi_2^2 + \pi_3^3); \\ \delta\alpha &= 2\beta\pi_1^2 - a\pi_3^4 - \alpha(\pi_0^0 - 2\pi_1^1 + \pi_4^4), \\ \delta\beta &= \gamma\pi_1^2 + \alpha\pi_2^1 - b\pi_3^4 - \beta(\pi_0^0 - \pi_1^1 - \pi_2^2 + \pi_4^4), \\ \delta\gamma &= 2\beta\pi_2^1 - c\pi_3^4 - \gamma(\pi_0^0 - 2\pi_2^2 + \pi_4^4), \end{aligned} \tag{3}$$

где символ дифференцирования δ соответствует изменению только вторичных параметров и принято обозначение $\omega_i^k(\delta) = \pi_i^k$.

После этого нетрудно проверить, что ранг определителя

$$R = \begin{vmatrix} a\beta - \alpha b & {}^1/_2\,(a\gamma - c\alpha) \\ {}^1/_2\,(a\gamma - c\alpha) & \gamma b - c\beta \end{vmatrix}$$

является абсолютным инвариантом рассматриваемой подгруппы.

В настоящей работе производится построение канонического репера для поверхностей, у которых определитель R отличен от нуля.

3. Определитель R обращается в нуль, если $a = 0$ и $\alpha = 0$ или если $c = 0$ и $\gamma = 0$. Если

$$c \neq 0, \quad \alpha \neq 0 \quad (\text{или } a \neq 0,\ \gamma \neq 0), \tag{1a}$$

то закон изменения коэффициентов (3) позволяет привести уравнения (2) к виду

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= 0, & \omega_1^4 &= \omega^1, \\ \omega_2^3 &= \omega^2, & \omega_2^4 &= 0. \end{aligned} \tag{2'}$$

Если $a = 0$ и $c = 0$, то при $R \neq 0$ необходимо

$$\alpha \neq 0, \quad \gamma \neq 0, \tag{1б}$$

и аналогично при $a = 0$, $\gamma = 0$ необходимо $a \neq 0$, $c \neq 0$.

В случае (1б) соприкасающиеся плоскости кривых $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ пересекаются по прямой. Таким образом, случай (1б) может иметь место на любой поверхности, обладающей сетью кривых, соприкасающиеся плоскости которых пересекаются. Эта сеть определяется уравнением

$$(A_0\, dA_0\, d^2A_0\, \tilde{d}A_0\, \tilde{d}^2A_0) = 0, \tag{4}$$

где символы дифференцирования d и $\tilde{d}$ (соответственно ω_i^k, $\tilde{\omega}_i^k$) присвоены перемещениям по линиям сети.

Если воспользоваться таблицей (2′), соответствующей случаю (1а), уравнение (3) примет вид

$$\omega^1\tilde{\omega}^1 + \omega^2\tilde{\omega}^2 = 0. \tag{4'}$$

Оно определяет ∞^1 сетей, обладающих требуемым свойством. Таким образом, случай (1б) может иметь место на тех же поверхностях, что и (1а).

Случай (1б) можно свести к (1а). Действительно, если положить все $\pi_i^k = 0$, кроме π_4^3, то уравнения (3) дадут $\delta c = -\gamma\pi_4^3$, $\delta\alpha = 0$; следовательно, не меняя α, можно сделать c отличным от нуля.

Прямая, по которой пересекаются соприкасающиеся плоскости кривых $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ в случае (1б), может быть принята за ребро канонического репера. Однако построенный таким образом репер будет несимметричным.

4. Повторяя рассуждения п. 2 для уравнений (2′), можно привести получаемые уравнения к виду

$$\begin{aligned} \omega_4^3 &= \omega^1, & \omega_3^4 &= \omega^2, \\ \omega_1^2 &= 0, & \omega_2^1 &= 0, \\ \omega_0^0 - 2\omega_2^2 + \omega_3^3 &= 0, & \omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_4^4 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Возможен специальный случай, когда форма ω_4^3 или ω_3^4 обращается в нуль:

$$\omega_4^3 = 0 \quad (\text{или } \omega_3^4 = 0). \tag{1a'}$$

Наконец, повторяя еще раз те же рассуждения для уравнений (5) и приводя за счет выбора вторичных параметров определитель $(A_0\,A_1\,A_2\,A_3\,A_4)$ к единице, получаем следующую таблицу компонент:

	0	1	2	3	4
0	ω_0^0	ω^1	ω^2	0	0
1	$\nu\omega^2$	ω_1^1	0	0	ω^1
2	$n\omega^1$	0	ω_2^2	ω^2	0
3	ω_3^0	$5l\omega^2$	ω_3^2	ω_3^3	ω^2
4	ω_4^0	ω_4^1	$5\lambda\omega^1$	ω^1	ω_4^4

$$\omega_4^1 = e\omega^1 + {}^1/_3\,(3\nu - n + 1)\,\omega^2, \qquad \omega_0^0 = 3\,(\Lambda - l)\,\omega^1 + 3\,(L - \lambda)\,\omega^2,$$
$$\omega_3^2 = {}^1/_3\,(3n - \nu + 1)\,\omega^1 + \varepsilon\omega^2, \qquad \omega_1^1 = -l\omega^1 + L\omega^2,$$
$$\omega_4^0 = x\omega^1 + y\omega^2, \qquad \omega_2^2 = \Lambda\omega^1 - \lambda\omega^2,$$
$$\omega_3^0 = Y\omega^1 + X\omega^2, \qquad \omega_3^3 = (3l - \Lambda)\,\omega^1 + (\lambda - 3L)\,\omega^2,$$
$$\omega_4^4 = (l - 3\Lambda)\,\omega^1 + (3\lambda - L)\,\omega^2.$$

Здесь все вторичные параметры фиксированы.

5. Дадим геометрическую характеристику полученному реперу. Ребра A_0A_1, A_0A_2 координатного пентаэдра образуют единственную пару сопряженных касательных поверхности, откуда следует, что уравнение (4') определяет ∞^1 сетей, кривые которых имеют направления, гармонически разделяющие единственную пару сопряженных касательных. Вершины A_1 и A_2 служат первыми преобразованиями Лапласа точки A_0. Ребра A_1A_0 и A_1A_4, A_2A_0 и A_2A_3 касаются сопряженных кривых, соответственно, на поверхностях (A_1), (A_2). Легко проверить, что в случае $\omega_4^3 = 0$ первое преобразование Лапласа (A_1) есть линейчатая поверхность, причем семейство ее прямолинейных образующих $\omega_2 = 0$ касается некоторой пространственной кривой (развертывающаяся поверхность).

Остается установить, как расположена точка A_3 на прямой A_2A_3 (A_4 на A_1A_4). Для этого достаточно рассмотреть четырехпараметрическое семейство гиперквадрик, имеющих касание третьего порядка (наивысший возможный порядок касания) с данной поверхностью в точке A_0. Уравнение этого семейства в координатах относительно канонического репера имеет вид

$$a_{ik}x_ix_k = 0, \tag{*}$$

где

$$a_{00} = a_{01} = a_{24} = 0, \quad a_{11} = -a_{04}, \quad a_{14} = -{}^1/_3\,a_{03},$$
$$a_{12} = a_{02} = a_{13} = 0, \quad a_{22} = -a_{03}, \quad a_{23} = -{}^1/_3\,a_{04}.$$

Будем называть репер автополярным, если каждая гиперплоскость, построенная на четырех его вершинах, служит полярной гиперплоскостью одной из точек A_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ относительно какой-либо невырождающейся гиперквадрики семейства (*).

Если A_1, A_2 служат первыми преобразованиями Лапласа, а A_1A_0 и A_1A_4, A_2A_0 и A_2A_3 касаются сопряженных кривых на поверхностях

(A_1), (A_2), то возможны лишь два типа автополярных реперов:

$$\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}_{0123}, \quad \mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}_{0234}, \quad \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}_{0124}, \quad \mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}_{0134}, \quad \mathfrak{A}^4 = \mathfrak{A}_{1234}; \tag{I}$$

$$\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}_{0214}, \quad \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}_{0143}, \quad \mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}_{0213}, \quad \mathfrak{A}^4 = \mathfrak{A}_{0243}, \quad \mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}_{2143}, \tag{II}$$

где $\mathfrak{A}^i$ — полярная гиперплоскость вершины A_i и $\mathfrak{A}_{iklm} \equiv A_i A_k A_l A_m$.

Репер является автополярным типа (I) при вполне определенном выборе вершины A_3 на прямой A_2A_3; аналогично репер будет автополярным типа (II) при определенном выборе точки A_4 на A_1A_4.

Канонический репер — единственный, который является одновременно автополярным типа (I) относительно гиперквадрики

$$2x_0x_3 - x_2^2 - {}^2/_3\, x_1x_4 = 0$$

и типа (II) относительно

$$2x_0x_4 - x_1^2 - {}^2/_3\, x_2x_3 = 0.$$

6. Если $R = 0$, то при приведении уравнений (2) к наиболее простому виду может встретиться одна из следующих таблиц:

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= \omega^2, & \omega_1^4 &= 0, \\ \omega_2^3 &= \omega^1, & \omega_2^4 &= \omega^2; \end{aligned} \tag{2_1}$$

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= \omega^1, & \omega_1^4 &= 0, \\ \omega_2^3 &= \omega^2, & \omega_2^4 &= 0; \end{aligned} \tag{2_2}$$

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= 0, & \omega_1^4 &= 0, \\ \omega_2^3 &= 0, & \omega_2^4 &= \omega^2; \end{aligned} \tag{2_3}$$

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= 0, & \omega_1^4 &= 0, \\ \omega_2^3 &= 0, & \omega_2^4 &= 0. \end{aligned} \tag{2_4}$$

В случае (2_1) ранг R равен единице, поверхность несет одно семейство асимптотических $\omega^2 = 0$. В остальных случаях ранг R равен нулю.

При (2_3) поверхность — развертывающаяся, при (2_2) она содержится в трехмерном пространстве, при (2_4) вырождается в плоскость.

Московский городской педагогический институт им. В. П. Потемкина

Поступило 25 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана в дифференцильной геометрии, гл. XIV, 1948.