Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 1

МАТЕМАТИКА

Е. М. ЛАНДИС

# О ФУНКЦИЯХ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ РАЗНОСТИ ДВУХ ВЫПУКЛЫХ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 VI 1951)*

Выпуклой функцией двух переменных мы будем называть непрерывную функцию $f(x, y)$, заданную на квадрате $I$, график которой есть выпуклая поверхность и производные числа которой ограничены. А. В. Погореловым был поставлен вопрос о том, может ли функция, являющаяся разностью двух выпуклых, иметь равный нулю полный дифференциал на множестве, отображающемся в множество положительной меры. В настоящей заметке дается решение этого вопроса. С этой целью доказывается, что частные производные разности двух выпуклых функций суть функции ограниченной плоской вариации, а затем показывается, что функция, частные производные которой являются функциями ограниченной плоской вариации, не может иметь равный нулю полный дифференциал на множестве, отображающемся в множество положительной меры.

Определение 1. Пусть $z=\varphi(x, y)$ — функция, заданная на $I$. Назовем пополненным графиком функции $\varphi$ пространственное множество, состоящее из точек замыкания графика функции $\varphi$ и отрезков, перпендикулярных плоскости $xy$ и соединяющих точки замыкания графика $\varphi$. Пополненный график функции $\varphi$ будем обозначать через $\tilde{\varphi}$. Проекцию на плоскость $xy$ пересечения $\tilde{\varphi}$ с плоскостью $z=z_0$ назовем пополненным множеством уровня $z_0$ и обозначим $E_{z_0}$.

Пусть $H$ — множество в пространстве $xyz$. Положим функцию $\nu_H(z)$ равной в каждой точке $z_0$ длине (линейной мере Хаусдорфа [1]) пересечения множества $H$ с плоскостью $z=z_0$. Если множество $H$ есть множество типа $F_\sigma$, то функция $\nu_H(z)$ измерима.

Определение 2. Пусть $\varphi(x, y)$ — функция, заданная на $I$. Назовем плоской вариацией функции $\varphi$ интеграл:

$$W(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} \nu_H(z)\, dz.$$

Определение 3. Назовем множеством разрыва функции $\varphi(x, y)$ теоретико-множественную сумму невырожденных отрезков, перпендикулярных плоскости $xy$, принадлежащих пополненному графику функции $\varphi$. Это множество мы будем обозначать через $P_\varphi$. Множество $P_\varphi$, очевидно, есть множество типа $F_\sigma$.

Определение 4. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \nu_{P_\varphi}(z)\, dz$ будем называть вариацией на множестве точек разрыва функции $\varphi$.

Пусть $f(x, y)$ — выпуклая функция или функция, являющаяся разностью двух выпуклых. В этом случае $f(x, y)$ почти всюду дифференцируема. Доопределим функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в тех точках, в которых эти частные производные не существуют, положив их равными полусумме верхнего и нижнего пределов. Мы докажем, что эти частные производные являются функциями ограниченной вариации в смысле определения 2.

Определение 5. Пусть $f(x, y)$ — выпуклая функция, заданная на $I$. Пусть $H$ — множество на графике функции $f$. Проведем в точках множества $H$ всевозможные опорные плоскости к графику функции $f$. Множество $H^*$ концов единичных нормалей к опорным плоскостям к графику $f$ в точках из $H$ мы назовем множеством, параллельным $H$.

Лемма 1. *Пусть $f(x, y)$ — выпуклая функция. Пусть, далее, точка $(x_0, y_0)$ есть точка разрыва функции $f'_x$ (соответственно $f'_y$). Пусть разность между верхним и нижним пределами функции $f'_x$ $(f'_y)$ в точке $(x_0, y_0)$ равна $\alpha$.*

*Тогда, каков бы ни был круг $K \subset I$ с центром в точке $(x_0, y_0)$, площадь (двумерная мера Хаусдорфа* [1]*) множества $K^*$, параллельного графику $f$ на круге $K$, превосходит $Cd\alpha$, где $d$ — диаметр круга $K$ и $C$ — константа, зависящая от функции $f(x, y)$.*

С помощью этой леммы без труда доказывается лемма 2.

Лемма 2. *Пусть $f(x, y)$ — выпуклая функция, заданная на $I$.*

*Тогда вариация на множестве точек разрыва ее частной производной $f'_x$ $(f'_y)$ ограничена.*

Лемма 3. *Пусть $\varphi(x, y)$ — функция, заданная на $I$. Пусть $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ — точки из $I$ такие, что $\varphi(x_1, y_1) \neq \varphi(x_2, y_2)$. Пусть, далее, $\varphi(x_1, y_1) < z_0 < \varphi(x_2, y_2)$.*

*Тогда пополненное множество уровня $E_{z_0}$ разделяет точки $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ на $I$. Если в точках $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ функция $\varphi$ непрерывна, то эти точки не принадлежат $E_{z_0}$.*

Лемма 4. *Если $f(x, y)$ — выпуклая функция, то никакое пополненное множество уровня функции $f'_x$ $(f'_y)$ не содержит одноточечных компонент, не принадлежащих границе $I$.*

Лемма 5. *Пусть $D$ — плоский континуум. Обозначим через $g(x)$ функцию, равную в каждой точке $x_0$ числу точек, в которых прямая $x = x_0$ пересекает континуум $D$. Аналогично через $h(y)$ мы будем обозначать функцию, равную в каждой точке $y_0$ числу точек пересечения прямой, параллельной оси $x$ и имеющей ординату $y_0$ с континуумом $D$.*

*Тогда*

$$\operatorname{mes}_1 D \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$$

*(через $\operatorname{mes}_1 A$ обозначена линейная мера Хаусдорфа множества $A$).*

Лемма 6. *Пусть $f(x, y)$ — выпуклая функция.*

*Тогда вариация Тонелли функций $f'_x$ и $f'_y$ ограничена.*

Леммы 4 и 5 показывают, что плоская вариация частной производной выпуклой функции не превосходит вариации Тонелли плюс вариация на множестве точек разрыва. Применяя леммы 2 и 6, мы получаем теорему 1.

Теорема 1. *Пусть $f(x, y)$ — разность двух выпуклых функций.*

*Тогда $f'_x$ и $f'_y$ суть функции ограниченной плоской вариации.*

Перейдем теперь к доказательству того, что функция $f$, частные производные которой имеют ограниченную плоскую вариацию, не может иметь равный нулю полный дифференциал на множестве, отображающемся в множество положительной меры.

Для этого нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 7. *Пусть $G$ — ограниченная область на плоскости. Пусть $\xi$ и $\eta$ — точки, принадлежащие $G$. Пусть $A$ есть нижняя грань длин простых дуг, принадлежащих $G$ и соединяющих точки $\xi$ и $\eta$.*

*Тогда* $\operatorname{mes}_1(\overline{G}-G)\geqslant\frac{A}{4}$.

Лемма 8. *Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n \ldots$ — счетное число областей, сумма длин границ которых конечна.*

*Тогда не более чем счетное число точек может принадлежать границе более чем двух областей одновременно.*

Теорема 2. *Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, заданная на $I$ и удовлетворяющая на $I$ условию Липшица по обеим переменным. Пусть, далее, функция $\varphi=|f'_x|+|f'_y|$ есть функция ограниченной плоской вариации ($f'_x$ и $f'_y$ в точках, где они не существуют, дополняются, как это указано выше).*

*Тогда множество значений функции $f$ на множестве $\Omega$ точек, в которых полный дифференциал функции $f$ существует и равен нулю, имеет меру нуль.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна и $\operatorname{mes} f[\Omega]=\mu>0$. Прежде всего заметим, что множество точек разрыва функции $\varphi$ состоит из счетного числа множеств конечной длины, а потому мы можем считать, что на множестве $\Omega$ функция $\varphi$ непрерывна.

Далее, мы можем считать, что $\Omega$ отстоит от границы $I$ на положительное расстояние $\rho$.

Пусть теперь $\varepsilon>0$ — произвольное число. Рассмотрим пополненное множество уровня $E_\varepsilon$ функции $\varphi$. Это замкнутое множество. Возьмем в его дополнении на открытом квадрате $I$ компоненты, содержащие точки из $\Omega$. Обозначим их $G_1, G_2, \ldots$ Каждая такая компонента есть область.

Допустим, что $\operatorname{mes}_1 E_\varepsilon<+\infty$. Так как производные числа по всем направлениям в области $G_i$ $(i=1,2,\ldots)$ не превосходят $\varepsilon$, то, по лемме 7, колебание функции $f$ на $G_i$ не превосходит

$$\frac{8L}{\rho}\,\varepsilon \operatorname{mes}(\overline{G}_i-G_i), \tag{*}$$

где $L$ — периметр квадрата $I$ (действительно, если $\overline{G}_i-G_i$ не содержит точек границы $I$, то колебание $f$ на $G_i$ не превосходит $4\varepsilon\operatorname{mes}(\overline{G}_i-G_i)$, в противном же случае длина границы $G_i$ не меньше $\rho$, а потому имеет место неравенство (*)). Отсюда, применяя лемму 8, получаем, что

$$\operatorname{mes}_1 E_\varepsilon\geqslant\frac{\rho\mu}{16L\varepsilon},$$

откуда

$$W(\varphi)\geqslant\frac{\rho\mu}{16L}\int_0^{\varepsilon_0}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=+\infty.$$

Противоречие.

Теоремы 1 и 2 дают теорему 3.

Теорема 3. *Пусть $f(x, y)$ — разность двух выпуклых функций. Пусть $\Omega$ — множество точек, в которых полный дифференциал функции $f$ существует и равен нулю.*

*Тогда* $\operatorname{mes} f[\Omega]=0$.

Поступило
25 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Сакс, Теория интеграла, М., 1939.