Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 1

МАТЕМАТИКА

Б. В. КАЗАЧКОВ

О ТЕОРЕМАХ ТИПА СИЛОВА

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 26 VI 1951)

§ 1. В теории конечных групп классическая теорема Силова и ее обобщение для разрешимых групп, данное Холлом [1], занимают одно из центральных мест. В 1948—1950 гг. С. А. Чунихин [2–7], введя в рассмотрение П-отделимые и П-силовски правильные группы, объединил обе указанные теоремы, распространив при этом теорему Холла на более широкий класс групп, чем разрешимые. Вполне естественно, что дальнейшее исследование вопроса о теоремах типа Силова в теории конечных групп, а также вопроса об установлении аналогичных теорем в теории бесконечных групп представляет большой интерес.

В настоящей заметке сообщаются полученные нами результаты, связанные с теоремами типа Силова. Ниже мы применяем обозначения и терминологию цитированных работ С. А. Чунихина.

§ 2. Теоремы типа Силова для конечных групп. Пусть П — произвольное непустое множество простых чисел.

Определение 1. Произвольную группу $\mathfrak{G}$ будем называть группой типа П — *C*, если все ее силовские П-подгруппы [8] сопряжены и разрешимы.

Из этого определения легко получаются следующие утверждения:

а) конечная группа типа П — *C* есть также и группа типа П — 1;

б) для того чтобы конечная группа типа П — 1 была также и группой типа П — *C*, необходимо и достаточно, чтобы любая ее П-подгруппа входила в одну из сопряженных и разрешимых подгрупп порядка *m*, где *m* — наибольший П-силовский делитель для данной группы;

в) всякая конечная разрешимая группа есть группа типа П — *C*.

Работы С. А. Чунихина существенно обобщают первые два утверждения теоремы Силова: теорему о существовании подгрупп и теорему о сопряженности подгрупп. В направлении обобщения третьего утверждения теоремы Силова, теоремы о вложении подгрупп, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если фактор $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ конечной группы $\mathfrak{G}$ по некоторой разрешимой инвариантной подгруппе $\mathfrak{N}$ типа* П — *C, то и сама $\mathfrak{G}$ типа* П — *C*.

§ 3. Обозначим через Θ дополнение множества П до множества всех, вообще, простых чисел.

Определение 2. Произвольную группу $\mathfrak{G}$ будем называть группой типа ПΘ — *C*, если все ее силовские П-подгруппы сопряжены и разрешимы и все ее силовские Θ-подгруппы сопряжены.

Очевидно, что всякая группа типа ПΘ — *C* есть группа П — *C*. Здесь, как и в § 2, легко обнаруживаются следующие утверждения:

г) конечная группа типа ПΘ — *C* есть также и группа типа П — 2;

д) для того чтобы группа $\mathfrak{G}$ типа $\Pi - 2$ была также и группой типа $\Pi\Theta - C$, необходимо и достаточно, чтобы любая ее Π-подгруппа входила в одну из сопряженных и разрешимых подгрупп порядка m и любая Θ-подгруппа входила в одну из сопряженных подгрупп порядка n, где m и n суть наибольшие, соответственно, Π-силовский и Θ-силовский делители для данной группы;

е) всякая конечная разрешимая группа — типа $\Pi\Theta - C$;

ж) всякая Π-разрешимая группа есть группа типа $\Pi\Theta - C$.

В работе [7] С. А. Чунихин, обобщая теорему Шура — Цассенхауза [9], фактически также и усиливает ее, положительно решая вопрос о вложении подгрупп (см. теоремы 2 и 3 и рассуждения § 4 цитированной работы). Эта усиленная теорема Шура — Цассенхауза допускает следующее дальнейшее обобщение.

Теорема 2. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ порядка $g = mn$, $(m, n) = 1$, обладает нормальным делителем $\mathfrak{N}$ порядка n и пусть a — любой делитель g, удовлетворяющий условию $\left(a, \frac{g}{a}\right) = 1$.*

Тогда, если выполняется одно из следующих условий: 1) подгруппа $\mathfrak{N}$ разрешима и a кратно n или 2) фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ разрешима и a кратно n, то группа $\mathfrak{G}$ содержит по крайней мере одну подгруппу $\mathfrak{A}$ порядка a и по крайней мере одну разрешимую подгруппу $\mathfrak{B}$ порядка $\frac{g}{a}$, причем все подгруппы из $\mathfrak{G}$ порядка a сопряжены с $\mathfrak{A}$ и все подгруппы порядка $\frac{g}{a}$ сопряжены с $\mathfrak{B}$, всякая же подгруппа порядка a^*, делящего a, входит в одну из подгрупп порядка a и всякая подгруппа порядка $\left(\frac{g}{a}\right)^*$, делящего $\frac{g}{a}$, входит в одну из подгрупп порядка $\frac{g}{a}$.

§ 4. Приведенное в предыдущем параграфе утверждение ж) позволяет следующим образом усилить теорему 1.

Теорема 3. *Если фактор $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ конечной группы $\mathfrak{G}$ по некоторой Π-разрешимой инвариантной подгруппе $\mathfrak{N}$ типа $\Pi - C$, то и сама $\mathfrak{G}$ типа $\Pi - C$.*

Имеет также место аналогичная теорема, касающаяся понятия группы типа $\Pi\Theta - C$.

Теорема 4. *Если фактор $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ конечной группы $\mathfrak{G}$ по некоторой Π-разрешимой инвариантной подгруппе $\mathfrak{N}$ типа $\Pi\Theta - C$, то и сама $\mathfrak{G}$ типа $\Pi\Theta - C$.*

§ 5. Теоремы типа Силова для бесконечных групп. Для локально разрешимых групп [8] нами обобщается основное утверждение теоремы Дицмана — Куроша — Узкова [10], а именно: для произвольного множества простых чисел Π имеет место следующая теорема, стоящая в известном смысле параллельно теореме Холла [1].

Теорема 5. *Если силовская Π-подгруппа $\mathfrak{M}$ локально разрешимой группы $\mathfrak{G}$ обладает конечным числом сопряженных подгрупп, т. е. ее нормализатор $N_{\mathfrak{M}}$ имеет в $\mathfrak{G}$ конечный индекс, то этими сопряженными с $\mathfrak{M}$ подгруппами исчерпываются все силовские Π-подгруппы группы $\mathfrak{G}$.*

На основании теоремы С. Н. Черникова [11] о локальной разрешимости всякой периодической разрешимой группы вытекает справедливость теоремы 5 для периодических разрешимых групп и, тем более, для разрешимых групп с условием минимальности.

Однако для разрешимых групп с условием минимальности может быть доказано более сильное предложение, полностью переносящее теорему Холла на указанный класс бесконечных групп и не являющееся следствием предыдущей теоремы.

Теорема 6. *Все силовские* П*-подгруппы разрешимой группы* $\mathfrak{G}$, *удовлетворяющей условию минимальности, между собой сопряжены.*

§ 6. Класс групп, для которых справедлива теорема 5 предыдущего параграфа, может быть расширен. Введем следующие определения.

Определение 3. Конечную группу $\mathfrak{G}$ порядка $g = mn$, где m — наибольший П-силовский делитель числа g, будем называть группой типа $\Pi - O$, если она содержит по крайней мере одну подгруппу порядка m и все ее подгруппы порядка m сопряжены в $\mathfrak{G}$.

Определение 4. Произвольную группу $\mathfrak{G}$ будем называть группой типа $\Pi - S$, если все ее силовские П-подгруппы сопряжены. Аналогично утверждению а) из § 2, легко показать, что конечная группа типа $\Pi - S$ есть также и группа типа $\Pi - O$.

Определение 5. Локально конечную группу $\mathfrak{G}$ будем называть локально $\Pi - S$-группой, если каждая конечная подгруппа ее есть подгруппа типа $\Pi - S$.

Теорема 7. *Если силовская* П*-подгруппа* $\mathfrak{M}$ *локально* $\Pi - S$*-группы* $\mathfrak{G}$ *обладает конечным числом сопряженных подгрупп, т. е. ее нормализатор* $N_{\mathfrak{M}}$ *имеет в* $\mathfrak{G}$ *конечный индекс, то этими сопряженными с* $\mathfrak{M}$ *подгруппами исчерпываются все силовские* П*-подгруппы группы* $\mathfrak{G}$.

§ 7. Теорема 6 также допускает дальнейшее обобщение.

Теорема 8. *Если фактор* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ *произвольной группы* $\mathfrak{G}$, *удовлетворяющей условию минимальности по разрешимой инвариантной подгруппе* $\mathfrak{N}$, *типа* $\Pi - C$, *то и сама* $\mathfrak{G}$ *типа* $\Pi - C$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. А. Чунихину, поставившему на руководимом им научном алгебраическом семинаре рассматриваемый в настоящей работе вопрос и внимательно следившему за его решением.

Томский государственный педагогический
и учительский институт

Поступило
24 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ph. Hall, Journ. Lond. Math. Soc., **3**, 98 (1928). [2] С. А. Чунихин, ДАН, **59**, № 3 (1948). [3] С. А. Чунихин, ДАН, **60**, № 5 (1948). [4] С. А. Чунихин, ДАН, **66**, № 2 (1949). [5] С. А. Чунихин, ДАН, **69**, № 9 (1949). [6] С. А. Чунихин, Матем. сборн., **25** (67), 3 (1949). [7] С. А. Чунихин, ДАН, **73**, № 1 (1950). [8] А. Г. Курош, Теория групп, гл. VII, 1944. [9] H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, 1937. [10] А. П. Дицман, А. Г. Курош и А. И. Узков, Матем. сборн., **3** (45), 1, 179 (1938). [11] С. Н. Черников, там же, **7** (49), 1 (1940).