Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. РУБИНШТЕЙН

К ВОПРОСУ ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В СЛУЧАЕ ОДНОФАЗНОГО НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 V 1950)

Решение одномерной задачи Стефана на отрезке и исследование характера решения не представляет затруднений в случае двухфазного начального состояния среды [1]. Наоборот, при однофазном начальном состоянии решение этой задачи связано с серьезными затруднениями. Ранее нами было дано исследование поведения границы раздела фаз в окрестности $t=0$ в предположении существования решения [2] и дано доказательство существования решения в случае непрерывного согласования краевых и начальных данных в точке начального возникновения новой фазы [3]. Вопрос об единственности решения в случае начального однофазного состояния среды оставался открытым. В настоящей заметке мы, не решая до конца вопрос об единственности решения задачи, доказываем следующее предложение.

Пусть $u_{ij}(x, t)$; $y_j(t)$ — две системы решений задачи Стефана:

$$\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial x^2}=\frac{\partial u_{1j}}{\partial t} \quad (0<x<y_j(t));$$

$$a^2\frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial x^2}=\frac{\partial u_{2j}}{\partial t} \quad (y_j(t)<x<1);$$

$$u_{1j}(0, t)=f_1(t)\leqslant 0; \quad u_{ij}(y_j(t), t)=0; \quad u_{2j}(1, t)=f_2(t)\geqslant 0; \tag{1}$$

$$u_{ij}(x, 0)=\varphi_i(x) \quad (\varphi_1(x)\leqslant 0; \quad \varphi_2(x)\geqslant 0);$$

$$\frac{dy_j}{dt}=\frac{\partial}{dx}u_{ij}-\frac{\partial}{\partial x}u_{2j}\Big|_{x=y_j(t)}; \quad y_j(0)=l\subset[0, 1] \quad (j=1, 2).$$

Тогда $t=0$ является точкой накопления нулей разности

$$z(t)\equiv y_1(t)-y_2(t).$$

Теорема справедлива как при начальном двухфазном, так и начальном однофазном состоянии, если только $f_i(t)$ и $\varphi_i(x)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial}{\partial x}u_{1j}\geqslant 0; \quad \frac{\partial}{\partial x}u_{2j}\geqslant 0 \tag{2}$$

всюду в области их существования и, сверх того, если $|f_i(t)|$ — неубывающие функции от t. Ограничения, которые должны быть наложены на $f_i(t)$ и $\varphi_i(x)$ для того, чтобы (2) заведомо имело место, легко определяются из рассмотрения системы функциональных уравнений, выведенных нами в ([1]).

Доказываемая теорема является почти очевидным следствием принципа максимума в теории субпараболических функций ([4]). Действительно, допустим, что $t=0$ не является точкой накопления нулей $z(t)$. Тогда можно считать, что в некоторой достаточно малой окрестности $t=0$

$$\frac{d}{dt} y_1(t) - \frac{d}{dt} y_2(t) > 0. \tag{3}$$

Положим

$$\begin{gathered}\xi = x - y_1(t) + y_2(t); \quad \eta = x + y_1(t) - y_2(t);\\ w_1(\xi, t) = u_{11}(x, t); \quad w_2(\eta, t) = u_{22}(x, t).\end{gathered} \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial \xi}\left(\frac{d}{dt} y_1 - \frac{d}{dt} y_2\right); \; -y_1(t) + y_2(t) < \xi < y_2(t);\\
a^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} = \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial \eta}\left(\frac{d}{dt} y_1 - \frac{d}{dt} y_2\right); \; y_1(t) < \eta < 1 + y_1(t) - y_2(t).\\
w_1\Big|_{\xi=-y_1(t)+y_2(t)} = f_1(t) = u_{12}(0, t); \quad w_1\Big|_{t=0} = \varphi_1(\xi) = u_{12}(\xi, \theta);\\
w_1\Big|_{\xi=y_2(t)} = u_{12}\Big|_{x=y_2(t)} = 0;\\
w_2\Big|_{\eta=y_1(t)-y_2(t)+1} = f_2(t) = u_{21}(1, t); \quad w_2\Big|_{t=0} = \varphi_2(\eta) = u_{21}(\eta, \theta);\\
w_2\Big|_{\eta=y_1(t)} = u_{21}\Big|_{x=y_1(t)} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Отсюда видим, что, в силу условий (2) и (3), w_1 суперпараболична и w_2 суперпараболична в области их существования при $t>0$ достаточно малом. Но отсюда и из принципа максимума следует, что

$$\begin{gathered}0 \geqslant w_1(\xi, t) \geqslant u_{12}(x, t) \quad \text{при} \quad \xi = x \subset (0, y_2(t));\\
0 \leqslant w_2(\eta, t) \leqslant u_{21}(x, t) \quad \text{при} \quad \eta = x \subset (y_1(t), 1).\end{gathered}$$

Отсюда и из краевых условий на границах $x = y_j(t)$ следует, что

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \xi} w_1\Big|_{\xi=y_2(t)} \equiv \frac{\partial}{\partial x} u_{11}\Big|_{x=y_1(t)} \leqslant \frac{\partial}{\partial x} u_{12}\Big|_{x=y_2(t)};\\
\frac{\partial}{\partial \eta} w_2\Big|_{\eta=y_1(t)} \equiv \frac{\partial}{\partial x} u_{22}\Big|_{x=y_2(t)} \leqslant \frac{\partial}{\partial x} u_{21}\Big|_{x=y_1(t)}.\end{gathered}$$

Внося эти неравенства в последнее из условий (1), получим

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} u_{11} - \frac{\partial}{\partial x} u_{21}\Big|_{x=y_1} \leqslant \frac{\partial}{\partial x} u_{12} - \frac{\partial}{\partial x} u_{22}\Big|_{x=y_2} = \frac{dy_2}{dt},$$

что противоречит (3) — теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что не существует двух систем решений задачи Стефана, для которых границы раздела фаз были бы аналитическими или даже квази-аналитическими функциями от t. Таким образом решение вопроса об единственности границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана в случае однофазного начального состояния среды сводится к вопросу о природе решений задачи*.

---

* Заметим, что А. Дацев ([6]) считал достаточным основанием для утверждения единственности границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана тот факт, что направление касательной к ней при $t=0$ определяется однозначно, что было им доказано в предположении, что $y(t) = \lambda \sqrt{t}$. Полная необоснованность такой точки зрения не нуждается, очевидно, в доказательстве.

Заметим в связи с этим, что если $u(x, t)$ параболична внутри некоторой области D и является аналитической функцией от x и t на ее границах, то $u(x, t)$ является, в силу теоремы Хольмгрена ([5]), функцией от t второго класса вдоль всякой кривой $x = y(t)$, лежащей внутри области D. Таким образом, $u_i(y(t), t)$, вообще говоря, даже не квази-аналитичны при аналитических краевых и начальных заданиях. Именно этим объясняется трудность выделения класса краевых и начальных заданий, при которых гарантирована аналитичность (или квази-аналитичность) границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана.

Поступило
15 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Рубинштейн, ДАН, **58**, № 2 (1947); Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 1 (1947); там же, № 6 (1948); ДАН, **77**, № 1 (1951). [2] Л. И. Рубинштейн, ДАН, **62**, № 6 (1948). [3] Л. И. Рубинштейн, ДАН, **62**, № 2 (1948). [4] И. Петровский, Compositio Math., 383 (1935). [5] Э. Гурса, Курс матем. анализа, **3**, гл. I, 266, 1933. [6] A. Datzeff, Ann. de l'université de Sofia, **45**, livre 1, 321 (1948—1949).