Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

С. В. ВАЛЛАНДЕР и М. П. ЕЛОВСКИХ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГАЗОВ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 IV 1951)

В работе [1] были выведены уравнения движения вязкого газа в предположении, что газ совершенен, и в предположении, что средняя длина свободного пробега молекул мала по сравнению с характерным размером явления. Там же были приведены выражения для коэффициентов, встречающихся в этих уравнениях, и было отмечено, что передача тепла в газе может быть связана как с градиентом температуры, так и с градиентом плотности.

Поэтому новые уравнения движения газа естественным образом ставят вопрос о смысле той величины, которую экспериментаторы называют коэффициентом теплопроводности газа. В связи с этими же уравнениями естественным образом открываются и возможности для получения теоретической формулы для этого коэффициента.

В настоящей заметке, используя результаты работы [1], мы даем теоретическую формулу для так называемого коэффициента теплопроводности, вскрываем смысл этой величины и сравниваем полученные результаты с опытными данными.

Для определения коэффициентов теплопроводности k иногда ставят опыты с установившейся передачей тепла через слой газа, находящийся между двумя параллельными плоскостями, разделенными некоторым расстоянием l; иногда же для этой цели используют установившуюся передачу тепла через слой газа, находящийся между двумя коаксиальными цилиндрами некоторых радиусов R_1 и R_2.

При этом для вычисления k используются соответственно формулы

$$k = \frac{ql}{T_2 - T_1}, \qquad k = \frac{q}{2\pi}\,\frac{\ln(R_2/R_1)}{T_2 - T_1}, \tag{1}$$

где q — поток тепла, рассчитанный на единицу площади стенок (в первом случае) и на единицу высоты цилиндрического слоя (во втором случае); T_1 и T_2 — температуры стенок.

Опыты показывают, что коэффициенты k, вычисленные по обеим формулам (1), оказываются совпадающими друг с другом и зависящими от температуры.

Найдем в обоих случаях выражения для k. Так как первая из формул (1) получается предельным переходом из второй формулы (1) и так как теплопередача через плоский слой является предельным случаем теплопередачи через цилиндрический слой, то ограничимся рассмотрением теплопередачи только через цилиндрический слой.

Приведенные в работе [1] уравнения и краевые условия для рассматриваемого случая стационарной, одномерной, осесимметричной задачи после перехода к цилиндрическим координатам r, ϑ, z будут иметь вид:

$$\frac{d}{dr}(rv_r\rho) = \frac{d}{dr}(rQ_r); \tag{2}$$

$$\rho v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r}{r}\frac{d}{dr}(rQ_r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau_{rr}) - \frac{1}{r}\tau_{\vartheta\vartheta}; \tag{3}$$

$$c_v\rho v_r \frac{dT}{dr} + \left(c_v T - \frac{v_r^2}{2}\right)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rQ_r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rt_r) + \tau_{rr}\frac{dv_r}{dr} + \tau_{\vartheta\vartheta}\frac{v_r}{r}; \tag{4}$$

$$v_r\rho = Q_r \quad \text{при } r = R_1,\ r = R_2; \tag{5}$$

$$\frac{dP}{dr} = 0 \quad \text{при } r = R_1,\ r = R_2; \tag{6}$$

$$T = T_1 \quad \text{при } r = R_1; \qquad T_1 = T_2 \text{ при } r = R_2, \tag{7}$$

где v_r — скорость газа в направлении оси r; ρ — плотность; T — температура; Q_r и t_r — соответственно, рассчитанные на единицу площади потоки массы и тепла через площадки с нормалью, параллельной оси r; τ_{rr}, $\tau_{\vartheta\vartheta}$ — компоненты тензора напряжений; c_v — коэффициент теплоемкости при постоянном объеме, выраженный в механических единицах; P — давление, рассчитываемое по формуле Клапейрона.

Для полной определенности задачи к выписанным уравнениям и условиям нужно присоединить еще задание общей массы газа, заключающейся в цилиндрическом слое единичной высоты.

Для рассматриваемого случая, согласно [1], величины, входящие в (2) — (6), определяются формулами:

$$Q_r = D_1\frac{d\rho}{dr} + D_2\frac{dT}{dr}, \quad t_r = k_1\frac{d\rho}{dr} + k_2\frac{dT}{dr},$$

$$D_1 = \frac{\mu}{\rho}\alpha_1, \quad D_2 = \frac{\mu}{T}\alpha_2, \quad k_1 = \frac{\mu c_v T}{\rho}\beta_1, \quad k_2 = \mu c_v\beta_2, \quad P = R\rho T, \tag{8}$$

$$\tau_{rr} = -P + a\mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_r) + 2\mu\frac{dv_r}{dr},$$

$$\tau_{\vartheta\vartheta} = -P + a\mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_r) + 2\mu\frac{v_r}{r},$$

где μ — коэффициент вязкости, R — газовая постоянная и α_1, α_2, β_1, β_2 и a — некоторые безразмерные постоянные порядка единицы.

Уравнение (2) интегрируется и после учета (5) дает:

$$v_r\rho = Q_r. \tag{9}$$

Так как согласно формулам (8) Q_r содержит множителем μ, то согласно (9) можем считать, что v_r содержит множителем μ.

Имея это в виду, выбросим из (3), (4) и двух последних выражений (8) члены порядка μ^2 и μ^3. Тогда будем иметь $\tau_{rr} = \tau_{\vartheta\vartheta} = -P$, и уравнения (3) и (4) превратятся в следующие:

$$\frac{dP}{dr} = 0, \tag{10}$$

$$c_v\frac{d}{dr}(r\rho v_r T) = \frac{d}{dr}(rt_r) - P\frac{d}{dr}(rv_r). \tag{11}$$

Точный смысл приведенных упрощений легко устанавливается переходом к безразмерным величинам и заключается в том, что в уравнениях сохраняются члены порядка отношения средней длины свободного пробега молекул к расстоянию $R_2 - R_1$ и выбрасываются члены порядка квадрата и куба этого отношения.

Уравнение (10) автоматически обеспечивает выполнение условий (6) и дает

$$P = R\rho T = c_1 = \text{const}. \tag{12}$$

При наличии (12) уравнение (11) легко интегрируется. Интегрируя, получаем:

$$rv_r (P + c_v \rho T) - rt_r = c_2 = \text{const}. \tag{13}$$

Так как $R = c_p - c_v$, то из (13) имеем

$$c_p r v_r \rho T - rt_r = c_2. \tag{14}$$

На основании (10) можем выразить $d\rho / dr$ через dT / dr. Поэтому имеем

$$\begin{gathered} Q_r = v_r \rho = \frac{\mu}{T} (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{dT}{dr}, \\ t_r = \mu c_v (\beta_2 - \beta_1) \frac{dT}{dr}. \end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), интегрируя и удовлетворяя условиям (7), получаем

$$\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) = \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\int\limits_{T_1}^{T} \mu \, dT}{\int\limits_{T_1}^{T_2} \mu \, dT}. \tag{16}$$

При известной зависимости вязкости от температуры формулы (16), (12) и (9) полностью решают задачу о передаче тепла через слой газа, заключенный между двумя коаксиальными цилиндрами, ибо постоянная c_1, входящая в (12), легко находится из условия, чтобы масса газа, находящаяся внутри цилиндрического слоя единичной высоты, была равна заданному значению этой величины.

Имея (16), нетрудно вычислить величину q. Так как

$$q = 2\pi r t_r, \tag{17}$$

то, используя (15) и (16), получаем

$$q = \frac{2\pi}{\ln (R_2 / R_1)} c_v (\beta_2 - \beta_1) \int\limits_{T_1}^{T_2} \mu \, dT. \tag{18}$$

Имея q, легко вычисляем так называемый коэффициент теплопроводности. Получаем

$$k = c_v (\beta_2 - \beta_1) \frac{\int\limits_{T_1}^{T_2} \mu \, dT}{T_2 - T_1}. \tag{19}$$

Так как формула (19) обычно используется для малых разностей температур, то она очевидным образом упрощается и приобретает вид

$$k = c_v (\beta_2 - \beta_1) \mu. \tag{20}$$

Если (20) сопоставить со значениями коэффициента температурной теплопроводности k_2 и коэффициента плотностной теплопроводности k_1, то будем иметь

$$k = k_2 - \frac{\rho}{T} k_1. \tag{21}$$

Таким образом, так называемый коэффициент теплопроводности равен коэффициенту температурной теплопроводности минус коэффициент плотностной теплопроводности, умноженный на отношение плотности к температуре. Следовательно, обычно используемое отождествление экспериментально найденных значений коэффициента теплопроводности с коэффициентом температурной теплопроводности неверно.

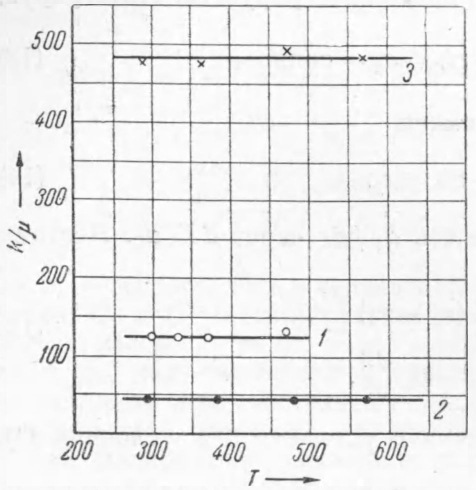

Рис. 1. *1* — воздух, *2* — азот, *3* — водород

Формула (20) дает теоретическую зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Так как для совершенного газа величины c_v, β_1 и β_2 являются константами, то коэффициент теплопроводности лишь постоянным множителем отличается от коэффициента вязкости при той же температуре.

Справедливость этого вывода для воздуха, водорода и азота (находящихся при давлении в одну атмосферу) подтверждают графики рис. 1, построенные на основании опытных значений k, заимствованных из работы ([2]), и опытных значений μ, заимствованных из работы ([3]).

При весьма высоких давлениях этот вывод не оправдывается из-за того, что нарушается справедливость нашего предположения о том, что газ совершенен. По этой же причине он плохо оправдывается и для углекислого газа.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Ленинградского государственного университета
им. А. А. Жданова

Поступило
19 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Валландер, ДАН, 78, № 1 (1951). [2] Е. А. Столяров, В. В. Ипатьев и В. Н. Теодорович, ЖФХ, 24, в. 2 (1950). [3] Д. Кэй и Т. Лэби, Справочник физика экспериментатора, 1949, стр. 78.