Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 1

МЕХАНИКА

Н. А. СЛЕЗКИН

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ ЧАСТИЦ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 7 V 1951)

Начало развития механики переменной массы было положено И. В. Мещерским (1) в конце XIX века. В его собственных работах были установлены основы механики точки переменной массы и решен ряд задач, относящихся как к движению точки, так и к движению системы точек переменной массы. Основные идеи И. В. Мещерского получили свое развитие в работах (2) А. А. Космодемьянского, Р. Е. Соркина и других советских авторов. Можно утверждать, что преимущественно работами русских и советских ученых к данному моменту разработаны основы: 1) механики точки переменной массы; 2) механики дискретной системы точек с переменной массой; 3) механики недеформируемого тела с переменной массой.

Естественно напрашивается мысль о дальнейшем развитии механики переменной массы в сторону создания основ:

4) механики деформируемой среды, составленной сплошь из частиц с переменной массой.

В данной заметке мы и пытаемся указать некоторые основы этого раздела механики переменной массы.

Разумеется, что в действительности переменную массу может иметь тело, объем которого нельзя уменьшать беспредельно до нуля. Следовательно, понятие точки переменной массы является абстракцией, но такой научной абстракцией, содержание которой в какой-то мере отражает свойства некоторых реальных механических движений. Коль скоро абстрактное понятие точки переменной массы получило признание и право на существование в науке о механической форме движения и взаимодействия тел, то должно получить право на существование и абстрактное понятие деформируемой среды, составленной сплошь из частиц с переменной массой. Понятие такой среды может отражать свойства некоторой группы реальных движений и взаимодействий деформируемой среды и потому может быть также полезным в науке о механической форме движения и взаимодействия.

Представим себе деформируемую среду, состоящую сплошь из частиц с переменной массой. Предположение о переменности массы частицы означает, что в каждой точке O с координатами x_1, x_2, x_3 к частице, расположенной в данное мгновение в этой точке и имеющей вектор скорости $\mathbf{V}$, присоединяется или отсоединяется некоторая масса, вектор абсолютной скорости которой $\mathbf{U}$ на какую-то заметную величину отличается от вектора $\mathbf{V}$ скорости самой частицы. Так как эта дополнительная масса может присоединяться с различных направлений, то естественно ввести вектор **Q** потока присоединяемой к частице в O массы за единицу времени и на единицу площади.

Следуя обычным рассуждениям, выведем уравнение изменения масс в фиксированном объеме параллелепипеда с вершиной в точке O и с ребрами Δx_1, Δx_2, Δx_3. В фиксированном объеме за промежуток времени Δt масса изменится на величину

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta t\,\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3. \qquad (1)$$

Это изменение массы будет обусловлено, с одной стороны, входом и выходом тех частиц, абсолютная скорость которых может отличаться от **V** лишь на бесконечно малые величины, а с другой стороны, входом и выходом тех частиц, абсолютная скорость которых будет отличаться на бесконечно малые величины не от **V**, а от **U**. Через грань с ребрами Δx_2, Δx_3 во внутрь параллелепипеда войдет следующее количество массы частиц первой категории

$$(\rho^* V_1)_{x_1}\Delta t\,\Delta x_2 \Delta x_3, \qquad (2)$$

где ρ^* есть среднее значение плотности частиц, распределенных по площади $\Delta x_2 \Delta x_3$. Количество же массы второй категории, присоединяемой к рассматриваемой грани с конечной относительной скоростью, будет представляться в виде

$$(Q_1)_{x_1}\Delta t\,\Delta x_2 \Delta x_3. \qquad (3)$$

Таким образом, к концу промежутка времени Δt через переднюю грань будет внесено следующее общее количество массы:

$$(\rho^* V_1 + Q_1)_{x_1}\Delta t\,\Delta x_2 \Delta x_3. \qquad (4)$$

Через противоположную грань будет вынесено общее количество массы, равное

$$(\rho^* V_1 + Q_1)_{x_1+\Delta x_1}\Delta t\,\Delta x_2 \Delta x_3. \qquad (5)$$

Составляя разность (4) и (5), повторяя те же рассуждения по отношению к другим граням и приравнивая общее количество задержавшейся внутри параллелепипеда массы выражению (1), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta t\,\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = -\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho^* V_i + Q_i)\,\Delta t\,\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3. \qquad (6)$$

Разделив в (6) на произведение $\Delta t\,\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, будем переходить к пределу, уменьшая промежуток времени Δt не до нуля, а до бесконечно малого промежутка τ, достаточного для присоединения потока массы **Q** к рассматриваемой частице, и уменьшая ребра Δx_1, Δx_2 и Δx_3 также не до нуля, а до такой бесконечно малой величины, чтобы можно было пренебречь не выписанными в выражениях (1)—(6) членами высшего порядка малости и положить

$$\rho^* = \rho.$$

В результате этого мы получим следующее уравнение изменения масс в фиксированном бесконечно малом объеме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_i + Q_i). \qquad (7)$$

Для вывода дифференциального уравнения движения частицы применим к массе, содержащейся в момент t в параллелепипеде, уравнение И. В. Мещерского. Согласно этому уравнению, произведение фиксированной в момент t массы на вектор ее ускорения равно сумме векторов: 1) непосредственно действующих в момент t сил и 2) реактивных сил, возникающих в момент $t+\tau$ от присоединяемых масс. Вектор реактивной силы равен произведению присоединяемой массы на разность векторов абсолютных скоростей $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. К непосредственно действующим на частицы в параллелепипеде силам будут относиться: вектор объемной силы

$$\mathbf{F}\rho\,\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3 \tag{8}$$

и результирующая от векторов напряжений $\mathbf{p}_{-1}$, $\mathbf{p}_{-2}$, $\mathbf{p}_{-3}$

$$\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial x_i}\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3. \tag{9}$$

Реактивная сила от массы, присоединяемой к передней грани, будет представляться в виде

$$[Q_1(\mathbf{U}-\mathbf{V})]_{x_1}\Delta x_2\Delta x_3. \tag{10}$$

Реактивная же сила от массы, отсоединяемой от противоположной грани, будет равна

$$-[Q_1(\mathbf{U}-\mathbf{V})]_{x_1+\Delta x_1}\Delta x_2\Delta x_3. \tag{11}$$

Составляя сумму (10) и (11) и повторяя те же рассуждения по отношению к другим граням, получим результирующую от всех реактивных сил в виде

$$-\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}[Q_i(\mathbf{U}-\mathbf{V})]\,\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3. \tag{12}$$

Приравнивая произведение массы в параллелепипеде на вектор ускорения сумме (8), (9) и (10), деля результат на произведение $\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ и переходя к пределу в указанном выше смысле, получим

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\rho\mathbf{F}+\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{p}_i-Q_i(\mathbf{U}-\mathbf{V})]. \tag{13}$$

Уравнение (13) представляет собой уравнение И. В. Мещерского, обобщенное на случай движения деформируемой среды частиц с переменной массой. На основании уравнения (13) мы приходим к выводу, что для изучения движения такой среды надо к обычному тензору напряжений присоединить тензор реактивных напряжений.

Представим левую часть уравнения (13) в развернутом виде. Рассматривая фиксированную частицу в два близких момента времени, будем иметь

$$\rho\Delta\mathbf{V}=\rho\left[\mathbf{V}(x_1+\Delta x_1,\,x_2+\Delta x_2,\,x_3+\Delta x_3,\,t+\Delta t)-\mathbf{V}(x_1,x_2,x_3,t)\right]=$$

$$=\rho\Delta t\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=3}\rho\Delta x_i\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x_i}. \tag{14}$$

Произведение $\rho\Delta x_i$ представляет собой тот поток массы через соответственную грань, который мы будем иметь по прошествии промежутка времени Δt, в течение которого частица переместилась на расстояние Δx_i и к концу которого наверное уже произошло присоединение к частице потока массы $\mathbf{Q}$. Следовательно,

$$\rho\Delta x_i=(\rho V_i+Q_i)\,\Delta t. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14) и переходя к пределу в указанном смысле, получим

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\rho\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=3}(\rho V_i+Q_i)\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x_i}. \tag{16}$$

На основании уравнений (7), (13) и (16) можем получить следующее уравнение изменения количества движения в фиксированном бесконечно малом объеме:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) = \rho \mathbf{F} - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho V_i \mathbf{V} + Q_i \mathbf{U} - \mathbf{p}_i\right]. \tag{17}$$

Таким образом, при составлении уравнения изменения количества движения в фиксированном объеме для деформируемой среды частиц с переменной массой не надо вводить дополнительного тензора напряжений, а достаточно только ввести в рассмотрение дополнительный тензор плотности потока количеств движения от присоединяемых масс.

Сделаем теперь некоторые замечания о возможности использования полученных уравнений механики деформируемой среды частиц с переменной массой.

Во-первых, рассмотренное в нашей статье [3] движение газа с учетом самодиффузии и термодиффузии есть лишь частный случай движения среды частиц с переменной массой. Для перехода от данного выше уравнения (17) к уравнению (15) прошлой заметки надо лишь положить

$$\begin{gathered} \mathbf{Q} = -P \operatorname{grad} \rho - \beta \operatorname{grad} T; \\ \rho V_i \mathbf{V} + Q_i \mathbf{V} = \rho V_i \mathbf{V} + Q_i \mathbf{U}. \end{gathered} \tag{18}$$

Последнее равенство возможно, если принять $\mathbf{U} = \mathbf{V}$; это означает, что присоединяемые диффузией дополнительные массы не имеют относительной макроскопической скорости. При этом предположении тензор реактивных напряжений обращается в нуль*.

Во-вторых, нам представляется, что все известное до сих пор из полуэмпирических теорий турбулентности и из многочисленных опытов дает много оснований для того, чтобы рассматривать турбулентное движение жидкости или газа как движение деформируемой среды частиц с переменной массой. В самом деле, процесс перемешивания частиц при турбулентном движении по сути дела представляет собой процесс присоединения или отсоединения некоторых долей массы от отдельных частиц. На этом основании вектор скорости пульсации можно рассматривать как вектор относительной скорости присоединяемой к частице массы, а вектор пульсационных напряжений необходимо уже рассматривать как вектор реактивных напряжений. При таком истолковании величин уравнение Мещерского (13) будет почти совпадать с хорошо известным уравнением Рейнольдса. Различие будет состоять лишь в том, что в левой части уравнения (13) будут встречаться лишние слагаемые из (16) и над всеми слагаемыми не будет значка осереднения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. В. Мещерский, Динамика точки переменной массы, СПб, 1897.
[2] А. А. Космодемьянский, в сборн. Механика в СССР за 30 лет, 1950.
[3] Н. А. Слезкин, ДАН, 77, № 2 (1951).

---

* Считаем необходимым указать, что по нашему недосмотру в статью [3] вкралась неточность. Приток тепла, обусловленный диффузией, был учтен дважды, поэтому в уравнениях (8), (13), (16) и (18) слагаемые с множителем βT являются излишними.